ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER

DANIEL BERNARD

Sur la géométrie différentielle des *G*-structures

Annales de l'institut Fourier, tome 10 (1960), p. 151-270
<http://www.numdam.org/item?id=AIF_1960__10__151_0>

Ann. Inst. Fourier, Grenoble
10 (1960), 151-270.

SUR LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE DES G-STRUCTURES

par **Daniel. BERNARD** (Strasbourg).

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'élaboration d'une théorie générale des G-structures réelles et complexes du premier ordre que soit à la fois simple et aussi complète que possible. Nous ne nous sommes donc pas attachés au cas de certains groupes G pour lesquels les propriétés sont particulièrement riches — et bien connues — mais au contraire, nous nous sommes efforcés de dégager ce qu'il y a de commun à ces structures pour des groupes G différents, ou tout au moins pour certaines grandes classes qui s'introduisent naturellement.

Soit G un sous-groupe du groupe linéaire réel (ou complexe) à m variables L_m (ou CL_m). Une G-structure sur la variété X de dimension m est déterminée par un *espace de repères*, sous-espace fibré principal de l'espace E des repères réels (ou E^C des repères complexes) de X. C'est pourquoi le chapitre premier est consacré à l'étude des sous-espaces fibrés principaux (s.e.f.p.). Certaines définitions et constructions classiques sur les espaces fibrés (topologiques) sont d'abord rappelées sous une forme adaptée à notre objet (§ 1, 2). Puis les G'-s.e.f.p. d'un espace fibré H(X, G) sont définis et caractérisés (prop. I, 3, 1); ils correspondent biunivoquement aux sections de H/G' (prop. I, 3, 3). Au § 5 est analysée la notion de s.e.f.p. dans le cas différentiable (prop. I, 5, 1) et sont caractérisées les parties H' de $H(X, G)$ qui admettent une structure de s.e.f.p. différentiable. En vue de l'étude des structures subordonnées communes à deux G-structures (ch. III) nous étudions l'intersection d'un G'- et d'un G''-s.e.f.p. dans le cas topologique (§ 4) puis dans le cas différentiable (§ 6). On peut dire en gros que l'intersection est un Γ-s.e.f.p. ($\Gamma = G' \cap G''$) sous la seule condition, évidemment nécessaire, que sa projection soit X, dès que G'/Γ (ou G''/Γ) est compact et que, dans le cas différentiable la propriété est d'ailleurs vraie pour « presque tous les couples de sous-groupes G' et G''».

Le chapitre II introduit d'abord (§ 1 et 2) l'outil qui sera principalement employé au chapitre III : les formes différentielles à valeurs vectorielles et le calcul sur ces formes (en particulier différents « produits » qui constituent l'extension à ces formes de lois de composition entre leurs espaces de valeurs). Au § 3 est analysée la notion de tenseur associé à une forme tensorielle sur un e.f.p. $H(X, G)$: c'est un tenseur sur le produit fibré $H \boxtimes E$ (E espace des repères de X) et non sur H lui-même. Les principales propriétés des connexions sont rappelées au § 4 à la fin duquel nous établissons les formules fondamentales de la géométrie différentielle par l'emploi exclusif de l'algorithme nouveau introduit au début du chapitre. L'extension de cet algorithme au cas des formes vectorielles complexes et en particulier de la notion de tenseur associé fait l'objet du dernier paragraphe.

Le chapitre III contient les résultats principaux de ce travail. Les espaces de repères et G-structures (réels et complexes) sont d'abord définis et plusieurs exemples analysés (§ 1). Une classe importante, qui contient les structures presque complexes, presque hermitiennes, riemaniennes... est celle des « structures définies par un tenseur», c'est-à-dire dont l'espace des repères distingués est le sous-espace des repères de E (resp. E^C) pour lesquels un certain tenseur sur E (resp. E^C) a une valeur déterminée (§ 2). Au § 3 sont étudiées les structures équivalentes et subordonnées : le théorème III, 3 simple application du chapitre premier, indique que la condition trivialement nécessaire pour que deux structures aient une structure subordonnée commune est en général suffisante. Les espaces de repères H sont caractérisés parmi les e.f.p. de base X par l'existence d'une 1-forme tensorielle « régulière » à valeurs dans R^m ou C^m appelée 1-forme fondamentale de H. L'inclusion $H \subset E$ (resp. E^C) permet *dans le cas des espaces de repères* de définir un tenseur associé à toute forme tensorielle sur H à valeurs dans M qui soit un tenseur sur H lui-même (prop. III, 4, 2); la correspondance entre forme tensorielle et tenseur associé est biunivoque; le tenseur et la forme sont liés par une relation particulièrement simple (12, ch. III, § 4). Toutefois cette correspondance n'est définie d'une façon canonique que lorsque H est un espace de repères réels (et M quelconque), ou H un espace de repères complexes et M un espace vectoriel complexe : cette remarque est essentielle au § 6. Le § 5 est consacré aux propriétés particulières des connexions sur les espaces de repères : caractérisation d'une variété X admettant une G-structure par l'existence d'une connexion linéaire dont le groupe d'holonomie est un sous-groupe de G (th. III, 5, 1); caractérisation des connexions linéaires qui sont des S-connexions, S étant une G-structure « définie par un tenseur » (th. III, 5, 2); torsion; identité de Ricci généralisée dont la démonstration est faite uniquement à l'aide de la notion de tenseur associé et de l'algorithme du chapitre II; relation entre le tenseur associé à la différentielle absolue d'une q-forme et la « dérivée covariante » de cette forme (prop. III, 5). Le *tenseur de structure* d'une G-structure S (généralisant le « tenseur de torsion d'une structure presque complexe ») caractérise les 2-formes tensorielles sur H de type vectoriel à valeurs dans R^m ou C^m qui sont la torsion d'une S-connexion [théorème (III, 6, 1) et (III, 6, 2)]. Toutefois ce tenseur n'est défini que pour les *G-structures de première espèce* : c'est-à-dire réelles ou, si elles sont complexes, telles que G soit un sous-groupe de Lie complexe de CL_m. La particularité des structures complexes de deuxième espèce provient de la non-existence d'un tenseur associé canonique sur un espace de repères complexes pour une forme à valeurs dans un espace vectoriel réel. Les paragraphes 7 et 8 contiennent des calculs du tenseur de structure et leur identification avec des invariants connus dans le cas de structures classiques. Nous appelons *presque intégrable* une structure dont le tenseur de structure est nul : par exemple une structure presque hermitienne presque intégrable est kählerienne.

Dans le chapitre IV nous nous occupons des automorphismes et automorphismes infinitésimaux d'une G-structure réelle. Au paragraphe 1 sont étudiées les G-*structures transitives* : les pseudogroupes de Lie du premier ordre correspondent biunivoquement aux classes de G-structures transitives équivalentes. Au § 2, nous montrons en particulier que les *conditions de Cartan* (définition IV, 2), conditions nécessaires d'existence d'une G-structure transitive de tenseur de structure donné (et qui sont suffisantes lorsque G est involutif) traduisent simplement le caractère tensoriel du tenseur de structure d'une part, l'identité de Bianchi d'autre part (prop. IV, 2, 2). Le § 3 est consacré aux G-structures involutives : alors si elles sont presque intégrables (resp. presque transitives) elles sont intégrables (resp. transitives) (th. IV, 3); puis nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que deux pseudogroupes de Lie soient localement semblables (théorème IV, 3). Dans le dernier paragraphe sont posés deux problèmes relatifs aux automorphismes infinitésimaux qui sont étudiés à l'aide du lemme d'Hermann (prop. IV, 4, 2) dans des cas particuliers. Les principaux résultats sont ceux-ci : Si S est une G-structure sur X subordonnée à une structure Riemannienne et presque intégrable, les isométries infinitésimales sont aussi des automorphismes infinitésimaux de S dès que X est compacte ou n'admet pas de 2-forme à dérivée covariante nulle (th. IV, 4, 1). Le théorème (IV, 4, 2) donne des conditions dans lesquelles toute transformation infinitésimale affine pour une S-connexion est un automorphisme infinitésimal de S.

Ce bref résumé appelle quelques remarques. Au Colloque International de Géométrie différentielle du C.N.R.S. (Strasbourg 1953), trois conférences attiraient l'attention sur la notion générale de G-structure (S.S. Chern [9]) ou « structure infinitésimale régulière » (C. Ehresmann [14] et P. Libermann [19]) : un grand nombre de structures de la géométrie différentielle peuvent être définies par la donnée une G-structure d'une part; les pseudo-groupes de Lie (« groupes continus infinis » d'Elie Cartan) sont d'autre part commodément définis comme pseudo-groupes des automorphismes locaux de certaines d'entre elles. Il apparaissait donc utile d'élaborer une théorie générale des G-structures, et c'est ce que nous avons tenté de faire, en nous appuyant entre autres sur les résultats et les exemples des auteurs déjà cités. Ainsi, dans [9], S. S.

Chern introduit « les premiers invariants » de la structure — tandis que, dans [19], P. Libermann peut éviter de les utiliser, car pour les structures qu'elle étudie « on peut imposer canoniquement la torsion »: notre *tenseur de structure* (Ch. III, § 6) précise la nature des premiers invariants, leur donne une définition globale et permet de caractériser les formes de torsion des S-connexions. De même, de nombreux résultats sont des généralisations, apportant souvent des simplifications, de résultats connus d'autres auteurs.

Les G-structures auxquelles ce travail est consacré sont les G-structures du premier ordre, réelles et complexes : il convient de nous expliquer sur ce choix. L'exemple des structures presque complexes et des structures subordonnées pour lesquelles définitions et calculs sont grandement simplifiés par l'introduction de repères complexes, nous a conduits à définir et étudier les G-structures complexes. En même temps, un premier exemple de G-structures complexes non équivalentes au réel a été étudié par G. Legrand dans sa thèse [18]. Il ne s'est pas révélé de différence fondamentale entre les G-structures réelles et complexes — et ceci justifie *a posteriori* leur étude simultanée — si ce n'est dans la définition du tenseur de structure : alors que les G-structures complexes de première espèce se comportent comme les structures réelles, l'extension du procédé aux G-structures complexes de deuxième espèce conduit à des tenseurs qui ne suffisent pas à caractériser la torsion des S-connexions. Au contraire, le cadre naturel de l'étude des G-structures d'ordre supérieur (Cf. Y. Matsushima [24]) est certainement la *théorie des jets* de C. Ehresmann alors que les structures du premier ordre ont pu être étudiées à l'aide de méthodes plus classiques de géométrie différentielle (espaces fibrés, connexions, calcul différentiel extérieur) qui, convenablement adaptées par l'emploi en particulier de l'algorithme du chapitre II, conduisent à des calculs et à des formulations très simples : cette différence de méthodes justifiait déjà une étude autonome des structures du premier ordre, requise d'ailleurs à notre avis par leur importance propre.

Nous avons été amenés à considérer que toutes les G-structures équivalentes à une structure donnée S (espaces de repères déduits de celui de S par les translations à droite de E, ou E^C) définissent la même structure infinitésimale et nous avons appelé $\mathcal{C}$-structure la classe des structures équivalentes à S, $\mathcal{C}$ désignant la classe des sous-groupes conjugués de G dans L_m (ou CL_m). La plupart des propriétés étudiées ici sont des propriétés des $\mathcal{C}$-structures. Nous avons pu définir un *faisceau des $\mathcal{C}$-structures* et c'est sans doute dans cette direction que ce travail aura ses premiers prolongements.

La bibliographie placée à la fin de ce travail n'est nullement exhaustive : nous avons pris pour principe de n'y porter que des travaux explicitement cités ici.

CHAPITRE I

ESPACES FIBRÉS
SOUS-ESPACES FIBRÉS PRINCIPAUX

1. — Définitions et notations.

Nous appellerons *espace fibré principal* (e.f.p.) un espace fibré principal à groupe structural topologique localement trivial. Plus précisément :

DÉFINITION I, 1, 1 [1]. — *Un e.f.p.* H(X, G) *de base* X *et groupe structural* G *est défini ainsi*

a) H et X *sont des espaces topologiques* [2], G *un groupe topologique,*

b) H *est muni d'une application continue* p *de* H *sur* X *admettant un relèvement au voisinage de tout* $x \in$ X. Un tel relèvement, qui est une application continue σ d'un voisinage U de X dans H, telle que $p \circ \sigma$ soit l'identité de U, est appelée *section locale de* H *au-dessus de* U. $H_x = p^{-1}(x)$ est la fibre au-dessus de x.

c) G *opère à droite sur* H, c'est-à-dire que l'on a une application continue $H \times G \rightarrow H$, $(z, g) \rightarrow z.g$, telle que $(z.g).g' = z.(gg')$ et $z.e = z$ ($g, g' \in G$, e identité de G) : l'application partielle Dg de H sur lui-même $z \rightarrow z.g$, ou translation à droite par g, est par suite un homéomorphisme de H tel que $Dg' \circ Dg = Dgg'$. *Les translations à droite de* G *respectent les fibres et sont simplement transitives sur les fibres.*

d) *L'application continue biunivoque* Φ_U *de* $U \times G$ *sur*

[1] C'est la définition classique, de Steenrod [26], mise sous une forme commode pour la suite.

[2] Un espace topologique sera toujours supposé séparé.

$H_U = p^{-1}(U)$, $(x, g) \to \sigma(x).g$ *associée à une section locale* σ *au-dessus de* U *est un homéomorphisme appelé carte locale de* H *au-dessus de* U *associée à* σ.

Nous appellerons *espace fibré* (e. f.) un espace fibré localement trivial à groupe structural topologique qui peut être défini ainsi :

DÉFINITION I, 1, 2. — E(X, G, F) *est un e.f. de base* X, *groupe structural* G, *fibre* F *si*

a) E, X *et* F *sont des espaces topologiques et* G *un groupe topologique opérant à gauche et effectivement sur* F *par* $(g, y) \to g.y$ $(g \in G, y \in F)$; *l'application partielle de* F *dans* F $y \to g.y$ *étant encore notée* g, *on a* $g \circ g' = gg'$;

b) E *est muni d'une application continue* p *de* E *sur* X [3]; $E_x = p^{-1}(x)$ est la *fibre* au-dessus de x;

c) *tout* $x \in X$ *possède un voisinage ouvert* U *muni d'une carte locale* Φ_U c'est-à-dire d'un homéomorphisme de $U \times F$ sur $E_U = p^{-1}(U)$ tel que $p \circ \Phi_U(x, y) = x$, $x \in X$, $y \in F$;

d) *si* U *et* V *sont des ouverts de* X *munis de cartes locales* Φ_U *et* Φ_V, *et si* $U \cap V \neq \emptyset$, *il existe une application continue* s *de* $U \cap V$ *dans* G *telle que le changement de carte* $\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U$ *soit l'application de* $(U \cap V) \times F$ *sur lui-même* $(x, y) \to (x, s(x).y)$.

On dira brièvement que $p : E \to X$ est une fibration si E est un e.f., au sens précis qui vient d'être défini, de base X et de projection p. Un e.f.p. est évidemment un e.f., G-groupe opérant sur G-fibre par translation à gauche; g désignera aussi bien l'élément $g \in G$ que l'opération translation à gauche par g, celle-ci étant toutefois notée L_g quand il y aura un risque d'ambiguïté : $L_g.g' = g.g'$ $(g, g' \in G.)$

2. — Constructions diverses d'espaces fibrés.

Soient E un e.f. et Φ_U^x la restriction à $\{x\} \times G$ de la carte locale Φ_U; nous appellerons *repère au point* x *de la structure fibrée de* E l'un quelconque des homéomorphismes de F sur E_x :

$$h = \Phi_U^x \circ g \quad g \in G \quad x \in X.$$

[3] La projection d'un e.f. E sur sa base sera généralement notée p, même s'il est question simultanément de plusieurs e.f.; lorsqu'il y aura un risque d'ambiguïté on précisera en la notant p_E.

De l'axiome *d*) de la définition (I, 1, 2) découle que cette définition est indépendante du choix de la carte locale Φ_U car si $x \in U \cap V$

$$\Phi_U^x = \Phi_V^x \circ s(x) \quad \text{et} \quad h = (\Phi_V^x \circ s(x)) \circ g = \Phi_V^x \circ (s(x)g), \quad s(x) . g \in G.$$

Soit $\hat{E}_x$ l'ensemble des repères en x de E, et $\hat{E} = \bigcup_{x \in X} \hat{E}_x$; il est classique — et immédiat à l'aide de la définition (I, 1, 1) — que les cartes $\hat{\Phi}_U$ associées aux cartes locales Φ_U de E

$$\hat{\Phi}_U : U \times G \to \hat{E} \quad (x, g) \to \Phi_U^x \circ g \quad x \in X, \ g \in G$$

définissent sur $\hat{E}$ une structure d'e.f.p. $\hat{E}(X, G)$. Remarquons simplement que la translation à droite par g sur $\hat{E}$ est $D_g . h = h \circ g$. $\hat{E}$ muni de cette structure est *l'e.f.p. associé à* E.

Cette construction s'applique en particulier à un e.f.p. H. Φ_U étant la carte de H associée à la section locale σ, un repère en x de H est une application $\Phi_U^x \circ g = \Phi_U^x \circ L_g$ $(g \in G)$ de G sur H_x. Or

$$\begin{aligned} \Phi_U^x \circ L_g(g') = \Phi_U^x(gg') &= \Phi_U(x, gg') \\ &= \sigma(x) . gg' = (\sigma(x) . g) . g' = \Phi_U(x, g) . g', \end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $\Phi_U^x \circ g = \hat{\Phi}_U(x, g)$:

$$\hat{\Phi}_U(x, g) . g' = \Phi_U(x, g) . g'.$$

Le point désignant au premier membre l'opération (à gauche) du repère sur la fibre-type G, et dans le second l'opération (à droite) de G sur H. Cette remarque montre qu'il existe une application bijective de H sur $\hat{H}$ qui peut être définie dans tout couple de cartes associées par

$$\Phi_U(x, g) \to \hat{\Phi}_U(x, g)$$

et qui est par suite un homéomorphisme; c'est d'ailleurs un G-isomorphisme d'e.f.p. (Cf. I, 3) et ceci permet d'identifier $\hat{H}$ à H, $h \in H$ étant identifié au repère $\hat{h} \in \hat{H}$: $g \in G \to h . g \in H$. La notation $\hat{h}$ sera parfois employée dans la suite quand il sera nécessaire de distinguer $\hat{h}$ de h.

Soit un e.f. E(X, G, F) et l'e.f.p. associé $H = \hat{E}$. $h \in H$ est un homéomorphisme de F sur E_{ph}, $y \in F \to h . y \in E_{ph}$. Alors, pour $h \in H$, $g \in G$, $y \in F$, on a

$$(h . g) . y = (D_g h) . y = (h \circ g) y = h . (g . y)$$

ce qui entraîne en particulier

$$(h.g).(g^{-1}.y) = h.[g.(g^{-1}y)] = h.y.$$

Cette remarque permet d'identifier E au quotient de F $\times$ H par la relation d'équivalence

$$(y,h) \sim (g.y,\ h.g^{-1}) \quad y \in \mathrm{F},\ h \in \mathrm{H},\ g \in \mathrm{G}.$$

Et par conséquent de construire E à partir de F et H.

Plus généralement, soit F un espace topologique sur lequel G opère par $\mathcal{R}(\mathrm{G})$. G n'étant pas supposé effectif sur F, soit N le sous-groupe distingué fermé des éléments de G qui laissent invariants tous points de F : G/N est effectif sur F.

Définition I, 2. — *Soit* F(H) *le quotient de* F $\times$ H *par la relation d'équivalence*

$$(y,\ h) \sim (\mathcal{R}(g).y, h.g^{-1}) \quad y \in \mathrm{F},\ h \in \mathrm{H},\ g \in \mathrm{G}$$

il a une structure fibrée F(H)[X, G/N, F]; *on dira que c'est l'e.f. obtenu par modelage de* F *sur* H (4), ou *l'e.f. associé à* H *de type* (F, $\mathcal{R}$(G)).

Soit α la projection canonique de F $\times$ H sur F(H); la projection de F(H) sur X est définie par

$$p_{\mathrm{F(H)}}(\alpha(y,\ h)) = p_{\mathrm{H}}\ (h)$$

et la structure fibrée de F(H) par les cartes Ψ_{U} associées aux sections σ de H au-dessus de U :

$$\Psi_{\mathrm{U}}(x,\ y) = \alpha(y,\ \sigma(x)) \quad x \in \mathrm{U} \subset \mathrm{X},\ y \in \mathrm{F};$$

l'e.f.p. $\widehat{\mathrm{F(H)}}$ est isomorphe à l'e.f.p. quotient H/N (voir ci-dessous).

Soient H un e.f.p. de groupe G et G′ $\subset$ G un sous-groupe fermé; la relation

$$h \sim h' \quad \text{si} \quad h' = h.g', \qquad h \in \mathrm{H}, \quad h' \in \mathrm{H}, \quad g' \in \mathrm{G}'$$

est une relation d'équivalence dans H. Soient H/G′ l'espace topologique quotient de H par cette relation et π l'application canonique H $\rightarrow$ H/G′. H/G′ est naturellement muni d'une projection sur X définie par

$$p_{\mathrm{H/G'}}(\pi(h)) = p_{\mathrm{H}}(h)$$

(4) Cf. Aragnol [1] Ch. I, § 2; avec la terminologie de Aragnol on dirait que X $\times$ F est modelé sur H.

G opérant naturellement sur $L = G/G'$, on peut modeler L sur H; soient α la projection canonique de $L \times H$ sur $L(H)$ et y_0 le point de L défini par la classe G'. Comme

$$\alpha(y_0, h.g') = \alpha(g'y_0, hg'.g'^{-1}) = \alpha(y_0, h), \qquad g' \in G', \quad h \in H$$

la relation
$$f(\pi(h)) = \alpha(y_0, h)$$

définit une application de H/G' dans $L(H)$. On démontre que f, qui est bijective et respecte les projections, est un homéomorphisme, d'où :

Proposition I, 2, 1. — *Soit* G' *un sous-groupe fermé du groupe structural* G *d'un e.f.p.*H. *L'espace quotient* H/G', G' *opérant sur* H *par les translations à droite de* G, *s'identifie à l'e.f.* $L(H)$, *modelé sur* H *de l'espace homogène* $L = G/G'$ *sur lequel* G *opère naturellement.*

Si N est un sous-groupe distingué de G, la structure fibrée de H/N précisée par la proposition (I, 2, 1) est une structure fibrée principale de groupe G/N, et l'application canonique π de H sur H/N est un homomorphisme d'e.f.p. compatible avec l'homomorphisme canonique ρ de G sur G/N (cf. I, 3). Ainsi G' n'étant pas un sous-groupe distingué de G, et G'_0 étant le plus grand sous-groupe de G' invariant dans G, H/G'_0 est un e.f.p. de groupe G/G'_0 qui s'identifie à l'e.f.p. $\widehat{H/G'}$ associé à H/G'.

La proposition (I, 2, 1) peut être complétée, si l'on fait l'hypothèse supplémentaire que la projection canonique $G \to G/G'$ est une fibration; nous dirons brièvement que G' *est un sous-groupe* (L. T.) *de* G; il est nécessairement fermé.

Proposition I, 2, 2 (théorème de surfibration). — *Soient* G *un groupe topologique,* G' *et* G'' *des sous-groupes tels que* $G'' \subset G' \subset G$, H *un e.f.p. de groupe* G. *Si* G' *est un sous-groupe* (L. T.) *de* G, *dans le diagramme commutatif ci-dessous, chaque application est une fibration :*

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\pi''"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\pi'"' near start] & H/G'' \arrow[d, "q"] \arrow[dl, "p''" near start] \\
X & H/G' \arrow[l, "p'"]
\end{tikzcd}$$

Cette proposition résulte de la précédente et de la démonstration de la propriété pour la seule application q.

Nous aurons enfin besoin de la notion de produit fibré :

Définition I, 2, 2. — *Soient* E(X, G, F) *et* E′(X, G′, F′) *deux e.f. Leur* produit fibré $E \boxtimes E'$ *est le sous-espace de* $E \times E'$ *qui se projette sur la diagonale de* $X \times X$; *il est muni d'une structure naturelle d'e.f. de base* X *et de groupe* $G \times G'$ *opérant trivialement sur la fibre* $F \times F'$.

En particulier, si E et E′ sont des e.f.p., il en est de même de $E \boxtimes E'$.

3. — Homomorphismes et sous-espaces d'espaces fibrés principaux.

Soient H(X, G) et H′(X, G′) des e.f.p. de même base X. Un *X-homomorphisme* f de H dans H′ compatible avec un homomorphisme ρ du groupe topologique G dans le groupe topologique G′ est une application continue de H dans H′ telle que $p_{H'} \circ f = p_H$ et

$$(1) \qquad f(z.g) = f(z).\rho(g), \qquad z \in H, \quad g \in G.$$

Le plus souvent, nous dirons simplement homomorphisme. Si $G' = G$, ρ étant la représentation identique de G, f sera un G-*isomorphisme.* Si $H' = H$, f est alors un automorphisme de H(X, G).

Si f satisfait simplement à (1), c'est une *représentation* de H dans H′ compatible avec ρ; une G-*représentation* si $G' = G$, ρ étant l'identité de G. Comme $p_{H'}f(z.g) = p_{H'}f(z)$, à f est alors associée une application continue μ de X dans lui-même définie par $p_{H'} \circ f = \mu \circ p_H$: on dit que f induit μ sur la base.

Définition I, 3, 1. — *Soit* G′ *un sous-groupe topologique de* G. *Un* G′*-sous-espace fibré principal* (G′ *-s.e.f.p.*) *de* H(X, G) *est un e.f.p.* H′(X, G′) *dont*

1° *l'espace* H′ *est un sous-espace de* H, *muni de la topologie induite,*

2° *la projection* p' *est la restriction à* H′ *de* p, 3° *la translation à droite par* $g' \in G'$ *est la restriction à* H' *de la translation à droite* $D_{g'}$ *opérant sur* H.

La caractérisation suivante sera utile pour la suite :

PROPOSITION I, 3, 1. — *Pour qu'une partie* H' *de* H *soit un* G'-*s.e.f.p. de* H, *il faut et suffit que la restriction* p' *de* p *à* H' *jouisse des propriétés suivantes :*

1° $p'(H') = X$.

2° $p'^{-1}(x) = z.G'$ si $z \in H'$ et $x = p'.z$.

3° p' *admet un relèvement local au voisinage de tout* $x \in X$ (*continu pour la topologie induite*).

Ces conditions, évidemment nécessaires, sont suffisantes en effet : soit H' une partie de H satisfaisant à ces propriétés; munissons la de la topologie induite. Alors l'axiome *a*) de la définition (I, 1, 1,) est vérifié de même que *b*) puisque p', restriction d'une application continue à un sous-espace, est continue et jouit de la propriété 3°. Quant à l'axiome *c*), il est vérifié parce que l'application de $H' \times G'$ sur H'

$$(z, g') \to z.g' \quad z \in H', \ g' \in G'$$

qui est bien définie d'après la propriété 2°, est encore continue comme restriction à un sous-espace d'une application continue. Enfin l'axiome *d*) est vérifié car, si σ est une section locale de H' au-dessus de U, c'est aussi une section locale de H de sorte que l'application de $U \times G$ sur H_U : $(x, g) \to \sigma(x).g$ est une carte locale de H et que sa restriction à $U \times G'$ — restriction d'un homéomorphisme à un sous-espace — est encore un homéomorphisme.

On déduit de cette proposition le

COROLLAIRE. — *L'image d'un e.f.p.* $H'(X, G')$ *par un homomorphisme* f *de* H *dans* H(X, G) *compatible avec la représentation* ρ *de* G' *dans* G, *est un* $\rho(G')$-*s.e.f.p. de* H.

PROPOSITION I, 3, 2. — *Pour qu'un* G'-*s.e.f.p.* H' *soit fermé dans* H(X, G), *il faut et il suffit que* G' *soit fermé dans* G.

En effet, si H' est fermé, $H'_x = H_x \cap H'$ est fermé dans $H_x (x \in X)$; or, G est homéomorphe à H_x dans l'homéomorphisme $\hat{z}$:

$$g \to z.g, \qquad (z \in H', \ g \in G)$$

qui transforme G′ en H'_x, de sorte que G′ est fermé dans G. La réciproque s'obtient immédiatement à l'aide des cartes locales de H.

Proposition I, 3, 3. — *Si* G′ *est un sous-groupe* (L. T.) *de* G, *les* G′*-s.e.f.p. d'un e.f.p.* H(X, G) *correspondent biunivoquement aux sections de* H/G′.

Gardons les notations de la proposition (I, 2, 1) et soit donné $H'(X, G') \subset H(X, G)$. H′ définit une application f de X dans H/G′ par $f(x) = \pi(H'_x)$ puisque, si $z_1 \in H'_x$ et $z_2 \in H'_x$, $z_2 = z_1 . g'$ $g' \in G'$ et $\pi(z_1) = \pi(z_2)$. f est continue, car dans un ouvert U muni d'une section locale σ_U, f se factorise en un produit d'applications continues: $f = \pi \circ \sigma_U$; c'est donc une section de H/G′. Soit réciproquement f une telle section et $H' = \bigcup_{x \in X} \pi^{-1}(f(x))$; la partie $H' \subset H$ munie de la topologie induite satisfait d'une façon évidente aux propriétés 1° et 2° de la proposition (I, 3, 1). Pour montrer que H′ est un G′-s.e.f.p. de H, il reste à montrer que p' admet des relèvements locaux au voisinage de tout $x \in X$. Or, si σ_U est une section de H et ρ l'application canonique de G sur $L = G/G'$, on a la carte locale Ψ_U de H/G′:

$$(x, y) \to \Psi_U(x, y) = \pi(\sigma_U(x) . g) \quad \text{si} \quad x \in X,\ y \in L,\ \rho(g) = y.$$

Il existe donc sur U une fonction continue à valeurs dans L, $y \to y(x)$, telle que

$$f(x) = \Psi_U(x, y(x)) \quad x \in U.$$

Soient $x_0 \in U$, O un voisinage de $y(x_0)$ dans L muni d'un relèvement $y \to s(y) \in G$, qui existe puisque G′ est un sous-groupe (L.T.). $V = y^{-1}(O) \cap U$ est un voisinage ouvert de x_0, et pour $x \in V$ on a $y(x) = \rho[s(y(x))]$ d'où

$$f(x) = \Psi_U(x, \rho[s(y(x))]) = \pi[\sigma_U(x) . s(y(x))]$$

c'est-à-dire que, pour $x \in V$, $\sigma_V(x) = \sigma_U(x) . s(y(x)) \in H'_x$; σ_V étant manifestement continue, elle constitue un relèvement de p' au-dessus de V., c.q.f.d.

Cette proposition n'est qu'une autre forme d'un théorème bien connu de C. Ehresmann [12] (5) car la notion de G′-s.e.f.p. est en fait équivalente à celle de restriction à G′ du groupe structural

(5) Voir aussi J. Frenkel [15], § 16.

G. En effet, de l'existence d'un G'-s.e.f.p. $H'(X, G') \subset H(X, G)$ découle la possibilité de restreindre à G' le groupe structural de H. Réciproquement si cette opération est possible, cela signifie qu'il existe un e.f.p. $K'(X, G')$ qui, par accroissement à G du groupe structural donne un e.f.p. $K(X, G)$ « équivalent » à H: mais ceci signifie dans notre langage que $K'(X, G')$ est un G'-s.e.f.p. de $K(X, G)$, et que celui-ci est G-isomorphe à $H(X, G)$; alors l'image par cet isomorphisme de $K'(X, G')$ est un G'-s.e.f.p. de H.

4. — Intersection des sous-espaces fibrés principaux.

Soient G' et G'' des sous-groupes de G, $H'(X, G')$ et $H''(X, G'')$ des s.e.f.p. de l'e.f.p. $H(X, G)$. Étudions leur intersection.

Proposition I, 4, 1. — *Si* $z' \in H'_x$ *et* $z'' = z'.g \in H''_x$ $(x \in X, g \in G)$, *pour que* $H_x \cap H''_x \neq \emptyset$, *il faut et suffit que* $g \in G'.G''$. *Alors, si* $z \in H'_x \cap H''_x$, *on a* $H'_x \cap H''_x = z.\Gamma$ *ou* $\Gamma = G' \cap G''$.

En effet, si $H'_x \cap H''_x \neq \emptyset$, soit $z \in H'_x \cap H''_x$; comme $z \in H'_x$, $z = z'.g'$ $(g' \in G')$ et comme $z \in H''_x$, $z = z''.g''$ $(g'' \in G'')$; alors $z''.g'' = z'.g'$ soit $z'' = z'.(g'.g''^{-1})$; d'où $g = g'.g''^{-1} \in G'.G''$ et réciproquement. D'autre part, si $z_1, z_2 \in H'_x \cap H''_x$, $z_2 = z_1.\gamma$: puisque $z_1, z_2 \in H'_x$ (resp. H''_x) $\gamma \in G'$ (resp. G'') de sorte que $\gamma \in \Gamma$ et réciproquement; donc $H'_x \cap H''_x = z_1.\Gamma$.

Supposons, pour simplifier l'exposé, que $p(H' \cap H'') = X$; alors $K = H' \cap H''$ satisfait aux conditions 1° et 2° de la proposition (I, 3, 1) et pour que K soit un Γ-s.e.f.p. de H, il faut et suffit qu'il admette des sections locales au voisinage de tout $x \in X$. Soit U un ouvert de X muni de sections locales σ' (resp. σ'') de H' (resp. H''); on a

$$\sigma''(x) = \sigma'(x).g(x) \quad x \in U$$

où $x \to g(x)$ est une application continue de U dans G, à valeurs dans $G'.G''$ puisque $H'_x \cap H''_x \neq \emptyset$. Si K est un s.e.f.p., U admet un recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}$ muni de sections locales ρ_α de K au-dessus de U_α : ρ_α est aussi une section locale de $H' \supset K$ (resp. H''), de sorte qu'il existe une fonction continue g'_α (resp. g''_α), $U_\alpha \to G'$ (resp. G''), telle que

$$\rho_\alpha(x) = \sigma'(x).g'_\alpha(x) = \sigma''(x).g''^{-1}_\alpha(x) \quad x \in U_\alpha$$

d'où

$$(1) \qquad g(x) = g'_\alpha(x) \cdot g''_\alpha(x).$$

Réciproquement, si U admet un recouvrement $\{U_\alpha\}$ muni de fonctions continues g'_α(resp. g''_α) à valeurs dans G' (resp. G") satisfaisant à (1) on a dans U_α

$$\sigma''(x) = \sigma'(x) \cdot g'_\alpha(x) \cdot g''_\alpha(x)$$

de sorte que

$$\rho_\alpha(x) = \sigma'(x) \cdot g'_\alpha(x) = \sigma''(x) \cdot g''^{-1}_\alpha(x)$$

est une section locale commune à H' et H" au-dessus de U_α, c'est-à-dire une section locale de K. Ceci nous conduit à poser

Définition I, 4, 1. — *Une application continue f d'un espace topologique* Y *dans le groupe topologique* G *à valeurs dans* G'.G" (G' *et* G" *sous-groupes de* G) *est dite* localement factorisable *dans* G'.G" *s'il existe un recouvrement ouvert* $\{Y_\alpha\}$ *de* Y *muni d'applications continues* g'_α *(resp.* g''_α*) de* Y_α *dans* G' *(resp.* G"*) telles que, pour* $y \in Y_\alpha$, *on ait* $f(y) = g'_\alpha(y) \cdot g''_\alpha(y)$.

Nous avons établi

Proposition I, 4, 2. — *Soient* H'(X, G') *et* H"(X, G") *des s.e.f.p. de* H(X, G) *et* $\{U_A\}$ *un recouvrement ouvert de* X *muni de sections locales* σ'_A *(resp.* σ''_A*) de* H' *(resp.* H"*), liées par* $\sigma''_A(x) = \sigma'_A(x) \cdot g_A(x)$. *Pour que* $K = H' \cap H''$ *soit un s.e.f.p. de* H, *il faut et suffit que les fonctions* g_A *prennent leurs valeurs dans* G'.G" *et soient localement factorisables.*

Il en sera toujours ainsi, sous la seule réserve que

$$p(H' \cap H'') = X,$$

si G' et G" satisfont à la propriété suivante.

Définition I, 4, 2. — *Un couple* G', G" *de sous-groupes du groupe topologique* G *est dit* régulier *si toute application continue d'un espace topologique dans* G, *à valeurs dans* G'.G", *est localement factorisable.*

Proposition I, 4, 3. — *Étant donnés un groupe topologique* G *et deux sous-groupes* G' *et* G", *pour que l'intersection d'un* G'*-s.e.f.p.* H' *et* d'un G"*-s.e.f.p.* H" *d'un e.f.p.* H(X, G) *soit un s.e.f.p., dès que* $p(H' \cap H'') = X$ — et ceci quels que soient

X, H, H′, H″ — *il faut et suffit que le couple* G′, G″ *soit un couple régulier de sous-groupes de* G.

La condition, suffisante d'après la proposition (I, 4, 2), est nécessaire en effet soient donnés un espace topologique X et une fonction continue $g\colon X \to G'.G''$; soient $H = X \times G$, $\sigma'(x) = (x, e)$; σ' est une section de H et $H'(X, G') = \bigcup_{x \in X} \sigma'(x).G'$ un s.e.f.p. (prop. I, 3, 1). σ'' défini par $\sigma''(x) = \sigma'(x).g(x)$ est une section de H, et $H''(X, G'') = \bigcup_{x \in X} \sigma''(x).G''$ un s.e.f.p. Alors, $p(H' \cap H'') = X$ puisque $g(x) \in G'.G''$ quel que soit $x \in X$. Si $H' \cap H''$ est un s.e.f.p., d'après la proposition (I, 4, 2) g est localement factorisable: X et g étant arbitraires la proposition est établie.

Nous allons chercher maintenant dans quelles conditions un couple de sous-groupes est régulier. Soit G′, G″ un couple régulier de sous-groupes du groupe topologique G; l'application identique de G′.G″ est, en particulier, localement factorisable, et il existe un recouvrement ouvert $\{\mathcal{O}_\alpha\}$ de G′.G″ et des applications continues g'_α (resp. g''_α) de $\mathcal{O}_\alpha$ dans G′ (resp. G″) telles que, pour $g \in \mathcal{O}_\alpha$, on ait

$$g = g'_\alpha(g) \cdot g''_\alpha(g).$$

Alors soit f une application continue de l'espace topologique Y dans G′.G″, les $Y_\alpha = f^{-1}(\mathcal{O}_\alpha)$ forment un recouvrement ouvert de Y muni des applications continues $\overline{g'_\alpha} = g'_\alpha \circ f$ (resp. $\overline{g''_\alpha} = g''_\alpha \circ f$) dans G′ (resp. G″), et, pour $y \in Y_\alpha$ $f(y) = \overline{g'_\alpha}(y) \cdot \overline{g''_\alpha}(y)$. C'est-à-dire que le couple G′, G″ est régulier dès que l'application identique de G′.G″ est localement factorisable.

G′.G″ est un sous-espace saturé de G pour la relation d'équivalence à gauche modulo G″ et, si l'application canonique π de G sur G/G″ est une fibration, G′.G″ admet par restriction à $B = \pi(G'.G'')$ de la structure fibrée de G, une structure fibrée principale de groupe G″. Soit V un ouvert de B muni d'une section locale s, $y \to s(y) \in G'.G''$; le couple G′, G″ étant régulier s est localement factorisable, et, localement dans V,

$$s(y) = g'(y) \cdot g''(y), \qquad g'(y) \in G', \qquad g''(y) \in G''$$

les fonctions g' et g'' étant continues. Or,

$$y = \pi(s(y)) = \pi(g'(y) \cdot g''(y)) = \pi(g'(y))$$

de sorte que g' est une section locale à valeurs dans G'. Réciproquement, supposons que la structure fibrée de $G'.G''$ admette dans un voisinage U de $y_0 = \pi(e)$ une section locale s à valeurs dans G', dont on peut supposer que $s(y_0) = e$. Il existe une telle section au voisinage de tout $y_1 \in B$. En effet, $y_1 = \pi(g'_1.g''_1) = \pi(g'_1)$ $(g'_1 \in G',\ g''_1 \in G'')$ et la translation à gauche $g \to g'_1.g$ est un homéomorphisme de G qui conserve $G'.G''$ et dont la restriction à $G'.G''$, qui est muni de la topologie induite, est encore un homéomorphisme; de même l'application $y \to g'_1.y (y \in B)$ est un homéomorphisme de B. $V = g'_1.U$ est un voisinage de y_1 et l'application de V dans $G'.G''$

$$y \in V \to g_1'^{-1}.y \in U \to s(g_1'^{-1}.y) \to g'_1.s(g_1'^{-1}.y) = t(y)$$

est continue et à valeurs dans G'. Comme

$$\pi(t(y)) = g'_1.\pi(s(g_1'^{-1}.y)) = g'_1.(g_1'^{-1}.y) = y$$

t est la section locale annoncée au-dessus de V. Alors l'application Φ_V de $V \times G''$ sur $\pi^{-1}(V)$

$$(y,\ g'') \to t(y).g'', \qquad y \in V, \quad g'' \in G''$$

est une carte locale de la structure fibrée de $G'.G''$, de sorte qu'il existe une fonction continue g''_V sur $\pi^{-1}(V)$ à valeurs dans G'', telle que

$$g = \Phi_V(\pi(g),\ g''_V(g)) = t(\pi(g)).g''_V(g), \quad g \in \pi^{-1}(V)$$

t prenant ses valeurs dans G', ceci signifie que l'application identique de $G'.G''$ est factorisable dans $\pi^{-1}(V)$, et, les $\pi^{-1}(V)$ recouvrant $G'.G''$, que le couple G', G'' est régulier. Ainsi :

Proposition I, 4, 4. — *Pour qu'un couple* G', G'' *de sous-groupes du groupe topologique* G *soit régulier, il faut et suffit que l'application identique de* $G'.G''$ *soit localement factorisable. Si l'un des sous-groupes* G'' (*resp.* G') *est* (L.T.), *il faut et suffit que la fibration de* $G'.G''$ *par les classes à gauche modulo* G'' (*resp. à droite modulo* G') *admette une section locale à valeurs dans* G' (*resp.* G'').

Cette dernière condition exprime que la restriction π' de π à G' admet des relèvements locaux. Soit $x \in B$, $g' \in \pi'^{-1}(x)$, $g'_1 \in \pi'^{-1}(x)$; alors $g'_1 = g'.g''$, $g'' \in G''$ d'où $g'' \in G' \cap G'' = \Gamma$; comme réciproquement, $\pi'(g'.\Gamma) = \pi'(g') = y$, $\pi'^{-1}(y) = g'.\Gamma$

($y \in$ B) est une classe à gauche modulo Γ. Ainsi se trouve définie une application biunivoque f' de G'/Γ sur B par

$$f'(g'.\Gamma) = \pi'(g') = g'.G''$$

de sorte que, si q est l'application canonique de G' sur G'/Γ, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & G' \arrow[dl, "\pi'"'] \arrow[dr, "q"] & \\ B & & G'/\Gamma \arrow[ll, "f'"] \end{tikzcd}$$

q étant ouverte et π' continue, f' est continue. Si σ est un relèvement de π' au-dessus de $V \subset B$, $\sigma \circ f'$ est un relèvement de q au-dessus de $f'^{-1}(V)$ ouvert de G'/Γ, de sorte que q est une fibration. Réciproquement, si q admet des relèvements locaux, et si de plus f' est un homéomorphisme, ce que l'on ne peut en général affirmer, π' admettra des relèvements locaux et le couple G', G'' sera régulier. On en déduit, f'' désignant l'application biunivoque de G''/Γ sur $G'.G''/G'$ définie de façon analogue à f' :

Théoreme I, 4. — *Pour qu'un couple* G', G'' *de sous-groupes* (L.T.) *d'un groupe topologique* G *soit régulier, il faut que* $\Gamma = G' \cap G''$ *soit un sous-groupe* (L.T.) *de* G' *et* G''. *Si l'une des applications* f' *ou* f'' *définies ci-dessus est un homéomorphisme, cette condition est suffisante; il en est ainsi en particulier dans les deux cas suivants :*

1° G' (*ou* G'') *est ouvert dans G,* 2° G'/Γ (*ou* G''/Γ) *est compact.*

Pour achever la démonstration, il reste à montrer que f' ou f'' est bicontinue dans les deux cas indiqués : montrons-le pour f'.

1° pour que f'^{-1} soit continue, il faut et suffit que π' soit ouverte, ou encore que le saturé par G'' d'un ouvert de G' soit ouvert dans $G'.G''$: ce sera le cas si un ouvert de G' est un ouvert de G, c'est-à-dire si G' est ouvert dans G. 2° G'' étant un sous-groupe (L.T.) de G est fermé, donc G/G'' et $B \subset G/G''$ sont séparés; alors si G'/Γ est compact, f' application biunivoque continue d'un compact sur un espace séparé est bicontinue.

5. — Espaces fibrés principaux et sous-espaces dans le cas différentiable.

Différentiable signifiera toujours « d'une classe de différentiabilité arbitraire — y compris analytique — compatible avec les données », la classe n'étant précisée qu'en cas de nécessité.

Définition I, 5, 1. — *Un espace fibré principal différentiable* (*resp. un e.f. différentiable*) *est défini par la définition* (I, 1, 1) (*resp.* I, 1, 2) *où l'on suppose de plus que la base* X, *ainsi que les composantes connexes de* H *et* F *sont des variétés différentiables, et* G *un groupe de Lie; toutes les applications intervenant dans la définition sont différentiables; les homéomorphismes sont différentiables et réguliers* (*à Jacobien* $\neq 0$).

Remarque I, 5. — Soient H un *ensemble* muni d'une projection p sur la variété différentiable X, $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de X et pour tout $U \in \mathfrak{R}$ une application biunivoque Φ_U de $U \times G$ sur $p^{-1}(U)$ telle que

a) $p \circ \Phi_U(x, g) = x,\ x \in U,\ g \in G.$

b) pour tout couple $U \in \mathfrak{R}$, $V \in \mathfrak{R}$, $U \cap V \neq \emptyset$ il existe une fonction différentiable $s_{u,v}$ sur $U \cap V$ à valeurs dans G telle que

$$\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U(x, g) = (x, s_{u,v}(x) \cdot g).$$

Alors, il existe une structure unique d'e.f.p. différentiable H(X, G) de projection p, telle que les Φ_U soient des cartes locales.

Les constructions du paragraphe I, 2 (e.f.p. associé, modelé, quotient par un sous-groupe fermé du groupe structural, produit fibré) conduisent à des e.f. différentiables; le théorème de surfibration (prop. I, 2, 2) est valable pour des sous-groupes fermés $G'' \subset G' \subset G$ sans hypothèse supplémentaire, les espaces et applications du diagramme étant tous différentiables. Enfin, les homomorphismes d'e.f.p. sont définis comme au paragraphe (I, 3), f étant simplement supposée différentiable et régulière.

Toutefois, la notion la plus naturelle de s.e.f.p. différentiable diffère de celle de s.e.f.p. dans le cas topologique (déf. I, 3, 1) dans la mesure où une sous-variété diffère d'un sous-espace : elle est en général munie d'une topologie différente de la topologie induite. D'une façon précise, *sous-variété* désignera dans la suite une variété régulièrement plongée sans point double [6] et l'on dira qu'une *sous-variété est propre* si sa topologie coïncide avec la topologie induite. De même nous appellerons *sous-groupe de Lie* d'un groupe de Lie G, un sous-groupe abstrait G′ de G qui soit lui-même un groupe de Lie et dont la composante connexe de l'identité G'_0 (pour la topologie propre de G′) est un sous-groupe analytique de G [7]; si G′ est une sous-variété propre de G, G′ est alors un *sous-groupe de Lie propre.*

DÉFINITION I, 5, 2. — *Soient* H(X, G) *un e.f.p. différentiable et* G′ *un sous-groupe de Lie de* G. *Un* G′-*s.e.f.p. différentiable de* H(X, G) *est un e.f.p. différentiable* H′(X, G′) *dont*

a) *la variété différentiable sous-jacente* H′ *est une sous-variété de* H (ou si H et H′ ne sont pas connexes, chaque composante connexe de H′ est une sous-variété d'une composante connexe de H.),

b) *la projection* p' *est la restriction à* H′ *de la projection* p,

c) *la translation à droite par* $g' \in G'$ *est la restriction à* H′ *de la translation à droite* $D_{g'}$, *opérant sur* H.

Dans cette définition, G′ est muni d'une structure déterminée de sous-groupe de Lie de G associée à une topologie $\mathfrak{T}$; soit $\mathfrak{T}_1$, une topologie moins fine que $\mathfrak{T}$ pour laquelle G′ est encore un sous-groupe de Lie de G et soit ρ l'homomorphisme identique de G′ muni de $\mathfrak{T}$ sur G′ muni de $\mathfrak{T}_1$ (noté G'_1) : c'est un homomorphisme continu de groupes de Lie, donc analytique. *Il existe sur* H′ *une structure unique d'e.f.p. différen-*

[6] On peut prendre, par exemple, la définition donnée par Chevalley ([11], p. 85, déf. 1) pour les sous-variétés analytiques, en supposant les données simplement différentiables.

[7] On peut déduire d'un théorème de Yamabe [27] sur les sous-groupes connexes par arcs d'un groupe de Lie la construction de toutes les topologies d'un sous-groupe abstrait G′ de G pour lesquelles il est sous-groupe de Lie de G : ces topologies correspondent biunivoquement aux sous-groupes distingués K de G′ connexes par arcs dans G; K étant donné, la topologie correspondante $\mathfrak{T}(G', K)$ de G′ admet pour système fondamental de voisinages de l'identité e les composantes connexes par arcs de e dans les voisinages ouverts de e pour la topologie induite sur K. Une de ces topologies est moins fine que toutes les autres : celle qui s'obtient en prenant pour K la composante connexe par arcs de e, G'_0 de G′ pour la topologie induite. Cette dernière coïncide en particulier avec la topologie induite si G′ est fermé.

tiable $H'(X, G'_1)$ *telle que l'application identique de* H' *soit un homomorphisme d'e.f.p. différentiables compatibles avec* ρ *de* $H'(X, G')$ *sur* $H'(X, G'_1)$, *et pour cette structure* H' *est encore un s.e.f.p. différentiable de* H. Soit en effet $\{\Phi_U\}$ une famille de cartes couvrant H' pour la structure $H'(X, G')$: pour que l'application identique f de H' soit un homomorphisme, il faut que les Φ_U — exactement les $f\circ\Phi_U$ — soient encore des cartes pour $H'(X, G'_1)$ car on doit avoir

$$f\circ\Phi_U(x, g) = f[\Phi_u(x, e).g] = f[\Phi_U(x, e)].g.$$

Comme f est différentiable, $f[\Phi_u(x, e)]$ est une section locale différentiable sur U de $H(X, G'_1)$ et

$$\Phi_{1,U}: \qquad (x, g) \to f[\Phi_u(x, e)].g$$

doit alors être une carte locale d'après l'axiome d) de la définition (I, 1, 1). Or, si $s_{U,V}$ est la fonction sur $U \cap V$ à valeurs dans G', associée au changement de coordonnées locales $\Phi_V^{-1}\circ\Phi_U = \Phi_{1,V}^{-1}\circ\Phi_{1,U}$ (cf. remarque I, 5, 1) c'est encore une application différentiable dans G'_1 puisque ρ est analytique, de sorte que les cartes $\{\Phi_{1,U}\}$ définissent effectivement sur H' une structure $H'(X, G'_1)$. Pour montrer que $H'(X, G'_1)$ est un s.e.f.p. différentiable de H, il reste à montrer que H' muni de la structure différentiable sous-jacente à $H'(X, G'_1)$ est une sous-variété; soit j l'application identique de H' dans H; l'application σ_U de U dans H définie par $\sigma_U(x) = j\circ\Phi_U(x, e)$ est une section locale différentiable de H et

$$\tilde{\Phi}_U: \qquad (x, g) \to \sigma_U(x).g \quad x \in U,\ g \in G$$

est une carte locale de H dont la restriction à $U \times G'$ est $j\circ\Phi_U$, d'après l'axiome c) de la définition (I, 5, 2). Dans les cartes Φ_U (ou $\Phi_{1,U}$) et $\tilde{\Phi}_U$, j est l'application

$$(x, g') \in U \times G' \to (x, g') \in U \times G$$

application qui est différentiable et régulière aussi bien pour G'_1 que pour G', puisque G'_1 est un sous-groupe de Lie de G. Ceci achève la démonstration. Les cartes associées Φ_U et $\tilde{\Phi}_U$ montrent de plus, puisque $p'^{-1}(U)$ (resp. $p^{-1}(U)$) est un ouvert de $H'(X, G')$ (resp. de $H(X, G)$), que H' est une sous-variété propre de H si et seulement si G' est un sous-groupe de Lie propre de G.

En particulier, en prenant pour $\mathcal{T}_1$ la moins fine des topologies de G′ pour lesquelles il est un sous-groupe de Lie de G ([8]), on obtient pour H′ *une structure minimale de s.e.f.p. différentiable de* H. Cette dernière topologie de G′ n'étant pas en général la topologie induite, l'e.f.p. topologique sous-jacent à $H'(X, G'_1)$ n'est pas en général un s.e.f.p. topologique de l'e.f.p. topologique sous-jacent à H. Comme le sous-espace H′ de H satisfait manifestement aux hypothèses de la proposition (I, 3, 1), les sections locales différentiables de $H'(X, G'_1)$ fournissant des relèvements locaux de p' continus pour la topologie induite, H′ admet aussi une structure de s.e.f.p. topologique de H : cette dernière coïncide avec la structure sous-jacente à $H'(X, G'_1)$ si et seulement si H′ est une sous-variété propre de H, ou G′ un sous-groupe de Lie propre de G. Il en est ainsi en particulier si H′ est fermé dans H, puisque d'après la proposition (I, 3, 2) G′ est alors fermé dans G. D'où :

Proposition I, 5, 1. — *Soit* H′(X, G′) un *s.e.f.p. différentiable de* H(X, G) *muni de sa structure minimale: pour que, sur* H′, *la structure d'e.f.p. topologique sous-jacente à* H(X, G′) *coïncide avec la structure de s.e.f.p. topologique de* H(X, G), *il faut et suffit que* G′ *soit un sous-groupe de Lie propre de* G (*ou, ce qui est équivalent, que* H′ *soit une sous-variété propre de* H); *on dira alors que* H′ *est un s.e.f.p. propre de* H; *il en est ainsi en particulier si* H′ *est fermé.*

Nous allons maintenant établir l'analogue de la proposition (I, 3, 1).

Proposition I, 5, 2. — *Soit* G′ *un sous-groupe de Lie de* G *et* H(X, G) *un e.f.p. différentiable. Pour qu'une partie* H′ *de* H *admette une structure de* G′-*s.e.f.p. de* G, *il faut et suffit que la restriction* p' *de* p *à* H′ *jouisse des propriétés suivantes* :

1° $p'(H') = X$.

2° $p'^{-1}(x) = z.G'$ si $z \in H'$ et $x = p.z$.

3° p' *admet des relèvements locaux qui sont des sections différentiables de* H.

Montrons que ces conditions sont suffisantes; soit $\mathfrak{R}$ un recouvrement ouvert de X, où chaque $U \in \mathfrak{R}$ est muni d'une section locale différentiable σ_U à valeurs dans H′. Pour $x \in U \cap V$,

([8]) Voir note ([7]) page 27.

$U \in \mathcal{R}$, $V \in \mathcal{R}$, $\sigma_U(x) = \sigma_V(x).s_{U,V}(x)$; $s_{u,v}$ est une application différentiable de $U \cap V$ dans G, qui d'après l'hypothèse 2° prend ses valeurs dans G' : c'est une application différentiable dans G'(9). Soit Φ_U l'application de $U \times G'$ sur $p'^{-1}(U)$:

$$\Phi_U(x, g') = \sigma_U(x).g', \qquad g' \in G', \quad x \in U;$$

le changement de cartes $\Phi_V^{-1} \circ \Phi_U$ est l'application

$$(x, g') \to (x, s_{u,v}(x).g'), \qquad x \in U, \quad g' \in G'$$

et par conséquent, la collection $\{\Phi_U\}$ définit sur H' une structure d'e.f.p. différentiable H'(X, G') de projection p'. Pour établir complètement la proposition il reste à établir que H' est, avec cette structure, une sous-variété de H, ce qui découle de la considération des cartes de H associées aux mêmes sections σ_U de H.

Les sous-groupes G' d'un groupe de Lie pour lesquels $G \to G/G'$ est une fibration analytique étant identiques à ses sous-groupes fermés, on déduit de la proposition (I, 5, 2) la proposition suivante par la même démonstration qui a permis d'établir la proposition (I, 3, 3) à partir de (I, 3, 1) :

PROPOSITION I, 5, 3 (10). — *Les s.e.f.p. différentiables* fermés *d'un e.f.p. différentiable* H(X, G) *correspondent biunivoquement aux sections différentiables des espaces* H/G', *où* G' *est un sous-groupe fermé quelconque de* G.

6. — Intersection des sous-espaces fibrés principaux différentiables fermés.

La même analyse qu'au début du paragraphe I, 4 conduit aux définitions et propositions suivantes :

DÉFINITION I, 6, 1. — *Une application différentiable d'une variété* Y *dans un groupe de Lie* G *à valeurs dans* G'.G'' (G' *et* G'' *sous-groupes de Lie de* G) *est dite différentiablement localement factorisable dans* G'.G'', *si elle est localement factorisable au*

(9) Ceci découle du lemme (I, 6, 2) où G' est considéré comme intégrale du système de Pfaff constitué par le champ de plans engendré par translation à gauche à partir de l'algèbre de Lie $\underline{G}'$ de G'.

(10) Cf. J. Frenkel [15], proposition 19, 2.

sens de la définition (I, 4, 1), *les facteurs* g'_α (*resp.* g''_α) *étant des applications différentiables dans* G′ (*resp.* G″).

Proposition I, 6, 1. — *Soient* H′(X, G′) *et* H″(X, G″) *des s.e.f.p. différentiables de* H(X, G) *et* $\{V_A\}$ *un recouvrement ouvert de* X *muni de sections locales différentiables* σ'_A *de* H′ (*resp.* σ''_A *de* H″) *liées par* $\sigma''_A(x) = \sigma'_A(x) . g_A(x)$ $(x \in V_A)$. *Pour que* $K = H' \cap H''$ *soit un s.e.f.p. différentiable de* H, *il faut et suffit que les fonctions* g_A *prennent leurs valeurs dans* G′.G″ *et soient différentiablement localement factorisables.*

Reprenons la démonstration de la proposition (I, 4, 2) avec ses notations et nos nouvelles hypothèses. Si l'on suppose K s.e.f.p. différentiable, ρ_α est une section locale différentiable de H à valeurs dans H′ (resp. H″) et les fonctions g'_α (resp. g''_α) des applications différentiables dans G à valeurs dans G′ (resp. G″) : alors g'_α (resp. g''_α) sont des applications différentiables dans G′ (resp. G″) [11] et g est donc différentiablement localement factorisable. La réciproque découle de la proposition (I, 5, 2).

Définition I, 6, 2. — *Un couple* G′, G″ *de sous-groupes de Lie de* G *est dit* générique *si toute application différentiable dans* G, *à valeurs dans* G′.G″ *est différentiablement localement factorisable.*

Proposition I, 6, 2. — *Étant donné un couple de sous-groupes de Lie* G′, G″ *de* G, *pour que l'intersection de deux s.e.f.p. différentiables* H′(X, G′) *et* H″(X, G″) *de l'e.f.p. différentiable* H(X, G) *soit un s.e.f.p. de* H *dès que* $p(H' \cap H'') = X$ — et ceci quels que soient X, H, H′, H″ — *il faut et suffit que le couple* G′, G″ *soit un couple générique de sous-groupes de* G.

Nous allons maintenant établir des conditions suffisantes pour qu'un couple de sous-groupes fermés d'un groupe de Lie G soit générique. Nous aurons besoin, pour celà, du

Lemme I, 6, 1. — *Soient* V_n *une sous-variété propre d'une variété différentiable* W_m *et* g *une application différentiable d'une variété* U_p *dans* W_m *prenant ses valeurs dans* V_n : *alors* g *est une application différentiable de* U_p *dans* V_n.

En effet, si l'on suppose seulement que V_n est une sous-

[11] Cf. note (9) page 30.

variété pas nécessairement propre, pour tout $q \in V_n$ il existe un voisinage $\mathcal{O}$ sur V_n (pour la topologie propre de V_n) muni de coordonnées locales X^i ($i = 1, 2, \ldots, n$) et cubique pour ces coordonnées ($|X^i - X_0^i| < b$), et un voisinage $\mathcal{O}'$ sur W_m muni de coordonnées locales $z^\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ et cubique pour les $z^\alpha(|z^\alpha - z_0^\alpha| < b)$, tels que $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$ et que la restriction à $\mathcal{O}$ de l'application identique f de V_n dans W_m soit

$$z^i = X^i, \qquad z^{n+k} = 0. \quad (k = 1, \ldots, m - n).$$

Si de plus V_n est une sous-variété propre, tout ouvert de V_n étant la trace sur V_n d'un ouvert de W_m, on peut restreindre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ de telle sorte que $\mathcal{O} = \mathcal{O}' \cap V_n$. Soit alors $r \in U_p$, $g(r) = q$, et g_1 l'application dans V_n définie par g. $g^{-1}(\mathcal{O}')$ étant un ouvert de U_p, il existe un voisinage ouvert ω de r sur U_p muni de coordonnées locales $x^a(a = 1, \ldots, p)$ tel que $g(\omega) \subset \mathcal{O}'$. Comme $g(\omega) \subset V_n$, $g(\omega) \subset V_n \cap \mathcal{O}' = \mathcal{O}$ et la restriction de g à ω s'exprime par

$$z^i = g^i(x^1, \ldots, x^p) \, (i = 1, \ldots, n); \qquad z^{n+k} = 0 (k = 1, \ldots, m - n)$$

les fonctions g^i étant différentiable pour $|x^a - x_0^a| < b$. Alors $g_1(\omega) = g(\omega) \subset \mathcal{O}$, et la restriction de g_1 à ω s'exprime par

$$X^i = g^i(x^1, x^2, \ldots, x^p) \, (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{c.q.f.d.}$$

Reprenons, avec les hypothèses actuelles, les notations de I, 4. La projection naturelle q de G' sur G'/Γ définit sur G' une structure d'e.f.p. analytique $G'(G'/\Gamma, \Gamma)$. Le fibré associé de fibre G'', Γ opérant sur G'' par translation à gauche, est l'e.f. analytique $G''(G')$ obtenu en prenant le quotient de $G'' \times G'$ par la relation d'équivalence ρ (déf. I, 2, 1):

$$(g'', g') \sim (\gamma \cdot g'', g' \cdot \gamma^{-1}), \qquad g' \in G', \quad g'' \in G'', \quad \gamma \in \Gamma.$$

L'application de $G'' \times G'$ dans G

$$(g'', g') \to g' \cdot g''$$

passe au quotient puisque $(g'\gamma^{-1}) \cdot (\gamma g'') = g' \cdot g''$. Si α est l'application naturelle de $G'' \times G'$ sur $G''(G')$ l'application obtenue f de $G''(G')$ dans G

$$\alpha(g'', g') \to g' \cdot g''$$

est une bijection sur $G' . G''$, ce qui définit en particulier sur cet ensemble une structure de variété analytique. Soit p la projection de $G''(G')$ sur sa base G'/Γ :

$$p \circ \alpha(g'', g') = q(g') = g'.\Gamma$$

d'où $$f' \circ p \circ \alpha(g'', g') = f'(g'.\Gamma) = g'G''.$$

D'autre part $\pi \circ f \circ \alpha(g'', g') = \pi(g'g'') = g'.G''$, c'est-à-dire que

$$\pi \circ f = f' \circ p.$$

On a ainsi, i désignant l'injection de G' dans G, le diagramme commutatif

(D) $$\begin{tikzcd} & G''(G') \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & G \arrow[d, "\pi"] \\ G' \arrow[urr, "i"] \arrow[r, "q"'] & G'/\Gamma \arrow[r, "f'"] & G/G'' \end{tikzcd}$$

f' étant injective définit aussi sur son image $B = \pi(G'.G'')$ une structure de variété analytique. Nous allons montrer que f et f' *sont des applications analytiques partout régulières et que par suite* $G'.G''$ (*resp.* B) *est une sous-variété analytique de* G (*resp.* G/G'').

Soit $x_0 = q(e)$ et U un voisinage ouvert de x_0 muni d'une section analytique s de la fibration q, avec $s(x_0) = e$. Dans U, $f' = \pi \circ i \circ s$: c'est un produit d'applications analytiques et f' est analytique dans U. Nous noterons $\underline{\varphi}$ l'application linéaire tangente à une application φ, T_{x_0} l'espace vectoriel tangent à G'/Γ en x_0, $\underline{G}$ (resp. $\underline{G}'$, $\underline{G}''$, $\underline{\Gamma}$) les espaces tangents en e à G (resp. G', G'', Γ). Soit n la dimension de T_{x_0}; de $q \circ s =$ identité de U découle que $\underline{s}(T_{x_0})$ est de dimension n et supplémentaire à $\underline{\Gamma}$; $\underline{i}$ étant injective, identifions $\underline{G}'$ et $\underline{i}(\underline{G}')$; $\underline{s}(T_{x_0}) \subset \underline{G}'$ entraîne $\underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{G}'' \subset \underline{G}' \cap \underline{G}'' = \underline{\Gamma}$ d'où $\underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{G}'' \subset \underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{\Gamma}$, qui est nul puisque $\underline{s}(T_{x_0})$ est supplémentaire à $\underline{\Gamma}$: donc $\underline{s}(T_{x_0}) \cap \underline{G}'' = 0$ et $\underline{G}''$ étant le noyau de $\underline{\pi}$, $\dim \underline{\pi}(\underline{s}(T_{x_0})) = \dim \underline{s}(T_{x_0}) = n$; c'est-à-dire, en revenant aux notations complètes, que $\underline{f}'(T_{x_0}) = \underline{\pi} \circ \underline{i} \circ \underline{s}(T_{x_0})$ est de dimension n. f' est donc régulière au point x_0. Par homogénéité, on en déduit que f' est partout analytique et régulière : en effet, G' opère à la fois sur G'/Γ et G/G'', transitivement sur G'/Γ, ses opérations étant des isomorphismes analytiques des deux espaces qui commutent avec f'.

A la section s de G' sur U est associée la carte analytique Φ de $G''(G')$ (cf. déf. I, 2, 1) :

$$U \times G'' \to G''(G') \qquad (x, g'') \to \Phi(x, g'') = \alpha(g'', s(x))$$

d'où

$$f \circ \Phi(x, g'') = s(x) \,.\, g'' \tag{1}$$

ce qui montre que f est analytique dans l'ouvert $\Phi(U \times G'')$. Si T_e est l'espace tangent à $G''(G')$ au point $\Phi(x_0, e) = f^{-1}(e)$, il découle de (1)

$$\underline{f}(T_e) = \underline{s}(T_{x_0}) + \underline{G}''. \tag{2}$$

Or, nous avons montré que $\underline{s}(T_{x_0})$ est transversal à $\underline{G}''$ et le second membre de (2) est une somme directe d'où

$$\dim \underline{f}(T_e) = \dim T_{x_0} + \dim \underline{G}'' = \dim G''(G')$$

ce qui montre que f est régulière au point $f^{-1}(e)$. D'autre part, comme $\underline{G}' = \underline{s}(T_{x_0}) + \underline{\Gamma}$ et $\underline{\Gamma} \subset G''$, on voit

$$\underline{f}(T_e) = \underline{G}' + G''. \tag{3}$$

Enfin, pour montrer que f est partout analytique et régulière, nous montrerons que l'isomorphisme analytique φ de G

$$g \to \varphi(g) = g'_1 \,.\, g \,.\, g''_1 \quad g'_1 \in G', \quad g''_1 \in G'' \ \text{ fixés}, \quad g \in G$$

qui laisse $G'.G''$ invariant, induit sur $G''(G')$ un isomorphisme analytique. La restriction à $\Phi(U \times G'')$ de la transformation induite $f^{-1} \circ \varphi \circ f$ est définie d'après (1) par

$$f^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \Phi(x, g'') = f^{-1} \circ \varphi(s(x) \,.\, g'') = f^{-1}(g'_1 \,.\, s(x) \,.\, g \,.\, g''_1). \tag{4}$$

Soient σ la section de $G' \to G'/\Gamma$ au-dessus de $V = g'_1 \,.\, U$

$$y \to \sigma(y) = g'_1 \,.\, s(g'^{-1}_1 \,.\, y)$$

et Ψ la carte associée de $G''(G')$

$$(y, g'') \to \Psi(y, g'') = \alpha(g'', \sigma(y)) \ y \in V, \quad g'' \in G''.$$

Alors, $f \circ \Psi(y, g'') = \sigma(y) \,.\, g''$ et si $x \in U$

$$f \circ \Psi(g'_1 \,.\, x, \ g'' \,.\, g''_1) = \sigma(g'_1 \,.\, x) \,.\, g'' \,.\, g''_1 = g'_1 \,.\, s(x) \,.\, g'' \,.\, g''_1. \tag{5}$$

En rapprochant (4) et (5) il vient

$$f^{-1} \circ \varphi \circ f \circ \Phi(x, g'') = \Psi(g'_1 \,.\, x, \ g'' \,.\, g''_1)$$

ce qui signifie que, dans les cartes analytiques Φ et Ψ de $G''(G')$, $f^{-1} \circ \varphi \circ f$ s'exprime par

$$(x,\ g'') \to (g'_1 . x,\ g''.g''_1)$$

qui est manifestement un isomorphisme analytique, c.q.f.d.

La proposition suivante nous servira à établir les deux théorèmes que nous avons en vue :

Proposition I, 6, 3. — *Toute application différentiable dans* $G'.G''$, *muni de la structure analytique qui vient d'être définie, est différentiablement localement factorisable.*

Une telle application h est une application différentiable d'une variété W dans $G''(G')$. Soit $\{\mathcal{O}_a\}$ un recouvrement ouvert de G'/Γ, chaque $\mathcal{O}_a$ étant muni d'une section locale analytique σ_a de $G' \to G'/\Gamma$, et $G''(G')$ de la carte associée Ψ_a

$$(x,\ g'') \to \Psi_a(x,\ g'') = \alpha(g'',\ \sigma_a(x)), \qquad x \in \mathcal{O}_a, \quad g'' \in G''.$$

Les $W_a = h^{-1} \circ p^{-1}(\mathcal{O}_a)$ constituent un recouvrement ouvert de W; la restriction h_a de h à W_a est une application différentiable dans $p^{-1}(\mathcal{O}_a)$, c'est-à-dire qu'il existe des applications différentiables x_a de W_a dans $\mathcal{O}_a$ (resp. g''_a de W_a dans G'') telles que

$$h_a(z) = \Psi_a(x_a(z),\ g''_a(z)) \qquad \text{pour} \qquad z \in W_a.$$

Alors, $f(h_a(z)) = f[\alpha(g''_a(z)),\ \sigma_a(x_a(z))] = \sigma_a(x_a(z)) . g''_a(z)$, σ_a étant une application analytique dans G', $g'_a = \sigma_a \circ x_a$ est une application différentiable dans G', ce qui établit la proposition.

Considérons à nouveau le diagramme (D); p et π étant des applications ouvertes, et l'image par f d'un ensemble saturé pour p étant saturée pour π, il est évident que, si f est un homéomorphisme (sur un sous-espace) il en est de même de f'. Réciproquement supposons que f' est un homéomorphisme; soit s une section de $G' \to G'/\Gamma$ au-dessus d'un ouvert U; $V = f'(U)$ est un ouvert relatif de $B = \pi(G'.G'')$ et $\sigma = i \circ s \circ f'^{-1}$ est un relèvement de π au-dessus de V continu pour la topologie induite; c'est donc une section locale de la restriction à B de l'e.f.p. topologique sous-jacent à $G \to G/G''$; dans les cartes locales associées à s et σ, f se traduit par

$$(x,\ g'') \to (f'(x),\ g'') \quad x \in U,\ g'' \in G''$$

et par suite f est un homéomorphisme. Lorsque f et f' sont ainsi des homéomorphismes, $G' . G''$ est une sous-variété propre de G et (lemme I, 6, 1) une application différentiable g d'une variété W dans G, à valeurs dans $G'.G''$ est une application différentiable dans $G'.G''$ (exactement, $h = f^{-1} \circ g$ est une application différentiable dans $G''(G')$) : par suite de la proposition (I, 6, 3) g est différentiablement localement factorisable. Nous avons démontré :

Théorème I, 6, 1. — *Soient* G' *et* G'' *des sous-groupes fermés du groupe de Lie* G. *Si* $G'.G''$ *est une sous-variété propre de* G, *le couple* G', G'' *est générique; il en est ainsi en particulier dans les deux cas suivants :*

1° G' (*ou* G'') *est ouvert dans* G, 2° G'/Γ (*resp.* G''/Γ) *est compact.*

Les doubles classes $V_g = G'.g.G''$ ($g \in G$) sont aussi des sous-variétés analytiques de G puisque $V_g = g.(g^{-1}.G'.g).G''$. L'espace tangent en e à $(g^{-1}.G'.g).G''$ est d'après la formule (3) $(\underline{\text{adj } g^{-1}})\underline{G'} + \underline{G''}$, et l'espace tangent en g à V_g est donc

$$(6) \quad T_g = \underline{L_g}(\underline{\text{adj } g^{-1}}.\underline{G'} + \underline{G''}) \\ = \underline{D_g}.\underline{G'} + \underline{L_g}.\underline{G''} = \underline{G'}.g + g.\underline{G''}$$

avec des notations qui sont claires. Elles constituent un feuilletage analytiques $\mathcal{F}$ de V. Un point $g_0 \in G$ sera dit *régulier pour le feuilletage* $\mathcal{F}$ s'il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}$ de g_0 tel que $\dim V_g = \dim V_{g_0}$, ou $\dim T_g = \dim T_{g_0}$, pour $g \in \mathcal{O}$. L'ensemble Ω des points réguliers est donc un ouvert. Il est saturé pour le feuilletage $\mathcal{F}$ car, si g_0 est régulier et $g_1 \in Vg_0$, il existe $g_1' \in G'$ et $g_1'' \in G''$ tels que $g_1 = g_1'.g_0 g_1''$; $\mathcal{O}_1 = g_1'.\mathcal{O}.g_1''$ est un voisinage ouvert de g_1 et, pour $g_2 \in \mathcal{O}_1$ il existe $g \in \mathcal{O}$ tel que $g_2 = g_1'.g.g_1''$ de sorte que $V_{g_2} = V_g$ et

$$\dim V_{g_2} = \dim V_{g_0} = \dim V_{g_1}.$$

La condition de régularité équivaut d'après (6) à

$$\dim (\underline{\text{adj } g^{-1}})\underline{G'} \cap \underline{G''} = \dim (\underline{\text{adj } g_0^{-1}})\underline{G'} \cap \underline{G''} \quad \text{pour} \quad g \in \mathcal{O}.$$

$(\underline{\text{adj } g^{-1}})\underline{G'}$ dépend analytiquement de g; par conséquent une base étant choisie dans $\underline{G}$, la condition précédente signifie que le rang $r(g)$ d'un certain système linéaire homogène S, dont les coefficients sont des fonctions analytiques sur G est constant dans $\mathcal{O}$. Alors les mineurs d'ordre $r(g_0) + 1$ de S sont des fonctions analytiques sur G nulles sur un ouvert $\mathcal{O}$: ils sont donc identiquement nuls sur la composante connexe C_{g_0} de G, de sorte que pour tout $g \in C_{g_0}$, on a $r(g) \leqslant r(g_0)$. Si $g_1 \in C_{g_0}$ est régulier, le même raisonnement montre que $r(g) \leqslant r(g_1)$ pour $g \in C_{g_0}$. Ces deux inégalités entraînent $r(g_0) = r(g_1)$, c'est-à-dire que, si g_0 est régulier

$$(7) \qquad r(g_0) = \sup_{g \in C_{g_0}} r(g) = \rho$$

soit

$$(8) \quad \dim (\underline{\mathrm{adj}\, g_0^{-1}})\underline{G}' \cap \underline{G}'' = \inf_{g \in C_{g_0}} \dim (\underline{\mathrm{adj}\, g^{-1}})\underline{G}' \cap \underline{G}''.$$

Inversement, si g_0 satisfait à (7), il y a en g_0 un mineur de S d'ordre ρ qui n'est pas nul : ce mineur est différent de zéro dans un voisinage ouvert $\mathcal{O} \subset C_{g_0}$ de g_0, de sorte que, pour $g \in \mathcal{O}$, $r(g) \geqslant \rho$ et par suite de (7), $r(g) = \rho$. Il y a donc identité entre les points de $C_{g_0} \cap \Omega$ et ceux qui satisfont à (7) : ceci montre que Ω n'est pas vide, et que le complémentaire dans C_{g_0} de $C_{g_0} \cap \Omega$ est l'ensemble des zéros des mineurs d'ordre ρ de S, fonctions analytiques sur C_{g_0} non toutes identiquement nulles : $C_{g_0} \cap \Omega$ est donc dense dans C_{g_0}, et Ω partout dense dans G.

Supposons $e \in \Omega$: alors $G'.G'' \subset \Omega$ et Ω est un voisinage ouvert de $G'.G''$. Supposons aussi pour simplifier l'exposé que Ω et $G'.G''$ sont connexes — sinon les mêmes raisonnements s'appliquent aux composantes connexes — Ω ouvert connexe de G est une variété analytique dont $G'.G''$ est une sous-variété, et les V_g ($g \in \Omega$) et leurs plans tangents T_g ont tous la même dimension. Comme d'après la formule (6) T_g dépend analytiquement de g, le champ de plans T, $g \in \Omega \rightarrow T_g$ définit sur Ω un système de Pfaff analytique complètement intégrable dont les V_g, et en particulier $V_e = G'.G''$, sont les intégrales maximales. Or,

LEMME I, 6, 2. — *Soient* T *un système de Pfaff analytique sur une variété analytique* Ω *et* V *une variété intégrale de* T *dénombrable à l'infini. Si* h *est une application différentiable de classe* C^s($s = 1, 2, \ldots, \infty, \omega$) *d'une variété* W *dans* Ω, *à valeurs dans* V : *alors h est une application différentiable* C^s *dans* V.

Cette proposition est démontrée dans Chevalley [11] (ch. III, § 9, p. 94, prop. 1) pour $s = \omega$: elle s'étend sans changement pour s quelconque. G étant connexe est dénombrable à l'infini et sa sous-variété $G'.G''$ l'est aussi (ibid., prop. 2) : on peut donc appliquer le Lemme (I, 6, 2) à $V = G'.G''$; une application h différentiable C^s de W dans G à valeurs dans $G'.G''$ est une application différentiable dans Ω, et par suite dans $G'.G''$; la proposition (I, 6, 3) montre alors que h est différentiablement localement factorisable.

Enfin, soient $g_1 \in G$, et le couple de sous-groupes fermés $g_1^{-1}.G'.g_1$, G''; Soient V^1 les doubles classes, $\mathcal{F}^1$ le feuilletage et T^1 le champ de plans définis à partir de ce couple; $\mathcal{F}^1$ et T^1 se déduisent de $\mathcal{F}$ et T par translation à droite par g_1^{-1}

$$V^1_g = (g_1^{-1}.G'g_1).g.G'' = g_1^{-1}.V_{g_1g} \qquad \text{d'où} \qquad T^1_g = g_1^{-1}.T_{g_1g}.$$

Par suite, pour que e soit régulier pour $\mathcal{F}^1$, il faut et suffit que g_1 le soit pour $\mathcal{F}$. Ainsi se trouve établi :

Théorème I, 6, 2. — *Les couples de sous-groupes fermés du groupe de Lie* G *sont « presque toujours » génériques au sens suivant: soit* G', G'' *un couple de sous-groupes fermés; l'ensemble des* $g \in G$ *tels que le couple adj* $g^{-1}.G'$, G'' *soit générique contient un ouvert partout dense dans* G. *Pour que ce couple soit générique, il suffit que g soit régulier pour le feuilletage de* G *par les doubles classes* $G'.g.G''$.

Exemples. — Soient r, r', r'', les dimensions de G, G', G''. La condition de régularité est sûrement réalisée au point e si

a) en utilisant la condition (8), $\dim \underline{G'} \cap \underline{G''} = 0$ c'est-à-dire si $\Gamma = G' \cap G''$ est discret;

b) en utilisant la condition (7), $r(e) = (r - r') + (r - r'')$ soit $r' + r'' - (r - r(e)) = r$ c'est-à-dire

$$\dim \underline{G'} + \dim \underline{G''} - \dim \underline{G'} \cap \underline{G''} = \dim \underline{G}$$

ou $\quad \dim(\underline{G'} + \underline{G''}) = \dim \underline{G} \quad$ ou $\quad \underline{G'} + \underline{G''} = \underline{G}$;

c) l'un des groupes G'(ou G'') est distingué, auquel cas $(\underline{\text{adj } g^{-1}}.\underline{G'}) \cap \underline{G''} = \underline{G'} \cap \underline{G''}$ à une dimension constante et $\Omega = G$;

d) $\Gamma = G' \cap G''$ est distingué, car alors $G' \supset \Gamma$ entraîne $(\underline{\text{adj } g^{-1}})\underline{G'} \supset \underline{\Gamma}$, d'où $(\underline{\text{adj } g^{-1}})\underline{G'} \cap \underline{G''}) \supset \underline{\Gamma}$ et

$$\dim (\underline{\text{adj } g^{-1}})\underline{G'} \cap \underline{G''} \geqslant \dim (\underline{\Gamma} = \underline{G'} \cap \underline{G''})$$

qui entraîne la régularité de e d'après (8).

REMARQUE. — Le critère de généricité donné par le théorème (I, 6, 3) n'est nullement nécessaire. Soient par exemple [12], $G = CL_m$, $G'' = L_m$, $G' = CL(n_1, n_2)$ groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \quad A \in CL_{n_1} \quad B \in CL_{n_2} \quad (n_1 + n_2 = m).$$

On voit facilement que le point e n'est pas régulier pour le feuilletage $\mathcal{F}$ associé au couple G', G''; pourtant

PROPOSITION I, 6, 4. — *Le couple* L_m, $CL(n_1, n_2)(m = n_1 + n_2)$ *est un couple générique de sous-groupes de* CL_m.

Remarquons d'abord que, pour qu'un couple G', $G'' \subset G$ soit générique, il suffit qu'il existe un voisinage $\mathcal{O}$ de e dans $G'.G''$ pour la topologie induite tel que toute application différentiable dans G à valeurs dans $\mathcal{O}$ soit localement différentiablement factorisable : en effet, si f est une application différentiable de Y dans G à valeurs dans $G'.G''$ et si $g'_1 . g''_1 \in f(Y)$ $V = g'_1 . \mathcal{O} . g''_1$ est un voisinage de $g'_1 . g''_1$ et $W = f^{-1}(V)$ un ouvert de Y. Soit φ la restriction de f à W et $\psi = L_{g'_1}^{-1} \circ D_{g''_1}^{-1} \circ \varphi$: c'est une application différentiable dans G à valeurs dans $\mathcal{O}$; il existe donc deux fonctions différentiables g' (resp. g'') sur W à valeurs dans G' (resp. G'') telles que, pour $y \in W$, $\psi(y) = g'(y) . g''(y)$. Alors, $\varphi(y) = g'_1 . g'(y) . g''_1(y) . g''$ ce qui montre que φ est différentiablement factorisable. Comme les voisinages W recouvrent Y, f est différentiablement localement factorisable et le couple G', G'' générique.

Revenons au cas où les groupes sont ceux qui ont été indiqués au début de cette remarque. L'ensemble $\mathcal{O}$ des matrices

$$g = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} \in CL_m \qquad \text{où} \qquad C \in CL_{n_1} \quad \text{et} \quad F \in CL_{n_2}$$

est un voisinage de l'identité. Soit f une application différentiable dans G à valeurs dans $\mathcal{O} \cap G'.G''$: $f(y) = \begin{pmatrix} C(y) & D(y) \\ E(y) & F(y) \end{pmatrix}$, les quatre matrices partielles étant des fonctions différentiables.

[12] Nous utiliserons en général, pour les groupes classiques les notations de C. Chevalley [11]. Toutefois le groupe Gl (n, R) (resp. Gl (n, C)) sera noté L_n (resp. CL_n).

Quel que soit $y \in Y$, il existe $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \in CL(n_1, n_2)$ et $\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \in L_m$ telles que

$$\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AP & BQ \\ AR & BS \end{pmatrix}$$

d'où $C = AP$ (P est donc une matrice régulière) et $E = AR$ de sorte que $C^{-1}E = P^{-1}R$ c'est-à-dire que $C^{-1}E$ est réelle. De même $F^{-1}D = S^{-1}Q$ est réelle. Or, on a

$$\begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & O \\ O & F \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{n_1} & F^{-1}D \\ C^{-1}E & E_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Au second membre, les deux matrices sont différentiables et appartiennent respectivement à $CL(n_1, n_2)$ et L_m ce qui établit la proposition.

CHAPITRE II

FORMES DIFFÉRENTIELLES A VALEURS DANS UN ESPACE VECTORIEL CONNEXIONS

Pour tout ce qui concerne ce chapitre, le lecteur pourra se reporter à A. Lichnerowicz [22] dont nous adoptons la plupart des définitions et des notations, ainsi qu'à A. Aragnol [1]. Nous pensons que l'emploi systématique des formes à valeurs vectorielles définies globalement sur un espace fibré principal et des opérations que l'on peut définir sur ces formes permet un exposé particulièrement simple des questions de géométrie différentielle liées à la théorie des connexions. Sans donner ici un exposé en forme de ces méthodes, nous avons voulu en développer certaines règles suffisamment en détail et avec suffisamment de rigueur — bien que d'un point de vue volontairement « naïf » — pour pouvoir les employer le plus souvent possible dans la suite de ce travail.

Pour simplifier l'exposé, nous emploierons dans ce chapitre la même notation pour une application différentiable et son application linéaire tangente. D'autre part, dans tout ce travail, la sommation par rapport à des indices répétés ne sera pas en général indiquée.

1. — Formes à valeurs dans un espace vectoriel.

Soient V une variété différentiable, T_x l'espace vectoriel tangent à V au point x et T_x^* son dual. Soit, d'autre part, M un espace vectoriel réel de dimension finie m. Une *forme* *extérieure à valeurs dans* M *au point* x est une application linéaire φ_x de $\wedge T_x$ dans M, c'est-à-dire un élément de l'espace vectoriel $M \otimes \wedge T^*_x$. Une base $\{e_A\}$ (A = 1, 2, ..., m) étant choisie dans M, φ_x peut s'écrire

$$(1) \qquad \varphi_x = \sum_{A=1,2,\ldots,m} e_A \otimes \varphi^A_x = e_A \otimes \varphi^A_x$$

où les φ^A_x appartiennent à $\wedge T^*_x$, c'est-à-dire sont des formes extérieures scalaires sur T_x que nous appellerons *composantes de* φ_x *dans la base* $\{e_A\}$. Réciproquement toute somme finie telle que (1) détermine une forme extérieure à valeurs dans M, même si les vecteurs e_A ne constituent pas une base de M. Soient

$$e_A = e_{A'} M^{A'}_A, \qquad e_{A'} = e_A M^A_{A'}$$

les formules de passage de la base $\{e_A\}$ à la base $\{e_{A'}\}$, où la matrice $(M^A_{A'})$ est par conséquent l'inverse de $(M^{A'}_A)$. D'après la bilinéarité du produit tensoriel

$$\varphi_x = e_A \otimes \varphi^A_x = e_{A'} M^{A'}_A \otimes \varphi^A_x = e_{A'} \otimes M^{A'}_A \varphi^A_x$$

d'où la relation entre les composantes de φ_x dans les deux bases

$$(2) \qquad \varphi^{A'}_x = M^{A'}_A \varphi^A_x.$$

Une forme extérieure à valeurs dans M, φ_x, étant définie en tout point $x \in V$, si de plus ses composantes φ^A_x dépendent différentiablement de x et sont de classe C^s — ce qui d'après (2) est indépendant de la base choisie dans M — nous dirons que la collection $\{\varphi_x\}$ définit une *forme différentielle extérieure* φ *à valeurs dans* M *de classe* C^s *sur* V et nous écrirons encore,

$$(3) \qquad \varphi = e_A \otimes \varphi^A$$

φ^A étant la forme différentielle extérieure (scalaire) dont la restriction à T_x est φ^A_x. On aura encore entre les formes différentielles $\varphi^{A'}$ et φ^A, composantes de φ dans les bases $\{e_{A'}\}$ et $\{e_A\}$ la relation

$$(4) \qquad \varphi^{A} = M^{A'}_A \varphi^A.$$

Nous utiliserons maintenant la même notation φ, φ^A pour φ_x, φ^A_x. Si les φ^A sont homogènes et de même degré q, ce qui est une propriété intrinsèque d'après (4), φ est une *q-forme à* *valeurs dans* M. Si φ n'est pas homogène, la décomposition $\varphi = \Sigma\varphi_q$ en somme de formes homogènes obtenue en opérant cette décomposition sur les composantes a encore un caractère intrinsèque; on désignera par $\overline{\varphi}$ la forme $\overline{\varphi} = \Sigma(-1)^q\varphi_q$.

La valeur de la forme φ pour $\mathfrak{G} \in \wedge T_x$ est

$$\varphi(\mathfrak{G}) = e_A \langle \varphi^A, \mathfrak{G} \rangle \tag{5}$$

où $\langle , \rangle$ désigne la forme bilinéaire canonique sur $(\wedge T_X) \times (\wedge T^*_X)$. Par abus de langage, il sera parfois commode de noter

$$\varphi(\mathfrak{G}) = \langle \varphi, \mathfrak{G} \rangle. \tag{6}$$

Pour un q-vecteur décomposable, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \wedge \mathfrak{G}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{G}_q$ on notera aussi

$$\varphi(\mathfrak{G}) = \varphi(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_q). \tag{7}$$

Soit μ une application différentiable de W dans V; on peut définir *l'image réciproque* $\mu^*\varphi$ comme étant la forme sur W à valeurs dans M telle que

$$\mu^*\varphi = e_A \otimes \mu^*\varphi^A \tag{8}$$

et il découle de (4) que cette définition est intrinsèque. Alors si $\mathfrak{G}_y \in \wedge T_y$, $y \in W$, on a d'après (5) et (6)

$$\langle \mu^*\varphi, \mathfrak{G}_y \rangle = e_A \langle \mu^*\varphi^A, \mathfrak{G}_y \rangle = e_A \langle \varphi^A, \mu\, \mathfrak{G}_y \rangle$$

soit

$$\langle \mu^*\varphi, \mathfrak{G}_y \rangle = \langle \varphi, \mu\, \mathfrak{G}_y \rangle. \tag{9}$$

Enfin soit d le symbole de différentiation extérieure; il découle encore de (4) que la forme à valeurs dans M

$$d\varphi = e_A \otimes d\varphi^A \tag{10}$$

ne dépend pas de la base $\{e_A\}$: c'est la *différentielle extérieure de* φ.

Les opérateurs μ^* et d sont linéaires sur R, et satisfont, d'après leur définition dans une base de M, aux relations habituelles :

$$(\mu_2 \circ \mu_1)^* = \mu_1^*\mu_2^*. \tag{11}$$

$$d\mu^* = \mu^* d. \tag{12}$$

$$d.d = 0. \tag{13}$$

2. — Composition des formes a valeurs vectorielles.

A) Soient L, M, P trois espaces vectoriels de dimension finie, et une application bilinéaire de $L \times M$ dans P notée

$$l, m \to (l, m) \qquad l \in L, \quad m \in M.$$

A tout couple d'une forme $\underset{\prime}{\varphi}$ à valeurs dans M et d'une forme Φ à valeurs dans L, on peut associer canoniquement une forme $(\Phi, \underset{\prime}{\varphi})$ à valeurs dans P de telle façon que, si

$$\underset{\prime}{\varphi} = e_i \otimes \underset{\prime}{\varphi}^i \qquad e_i \in M \text{ en nombre fini}$$

et
$$\Phi = h_\alpha \otimes \Phi^\alpha \quad h_\alpha \in L \text{ en nombre fini,}$$

on ait

$$(1) \qquad (\Phi, \underset{\prime}{\varphi}) = (h_\alpha, e_i) \otimes \Phi^\alpha \wedge \underset{\prime}{\varphi}^i.$$

Il suffit en effet de prendre pour $\{e_i\}$ (resp. $\{h_\alpha\}$) une base de M (resp. L) ainsi qu'une base $\{f_a\}$ de P; si $(h_\alpha, e_i) = C^a_{\alpha i} f_a$, $(\Phi, \underset{\prime}{\varphi})$ est nécessairement d'après (1)

$$(2) \qquad (\Phi, \underset{\prime}{\varphi}) = f_a \otimes C^a_{\alpha i} \Phi^\alpha \wedge \underset{\prime}{\varphi}^i$$

et l'on vérifie par changement de bases le fait que $(\Phi, \underset{\prime}{\varphi})$ ainsi définie ne dépend bien que de Φ et $\underset{\prime}{\varphi}$. L'opération $(\Phi, \underset{\prime}{\varphi})$ jouit de propriétés évidentes sur (2) par exemple :

a) elle satisfait bien à la formule (1) pour toute décomposition de $\underset{\prime}{\varphi}$ et Φ en sommes de produits tensoriels;

b) si Φ est une q-forme et $\underset{\prime}{\varphi}$ une q'-forme, $(\Phi, \underset{\prime}{\varphi})$ est une $(q + q')$-forme;

c) elle est bilinéaire

$$(3) \quad (\lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2, \underset{\prime}{\varphi}) = \lambda_1(\Phi_1, \underset{\prime}{\varphi}) + \lambda_2(\Phi_2, \varphi).$$
$$(4) \quad (\Phi, \lambda_1\underset{\prime}{\varphi}_1 + \lambda_2\underset{\prime}{\varphi}_2) = \lambda_1(\Phi, \underset{\prime}{\varphi}_1) + \lambda_2(\Phi, \underset{\prime}{\varphi}_2) \quad \lambda_1, \lambda_2 \in R;$$

d) pour une application différentiable $\underset{\prime}{\mu}$ de W dans V

$$(5) \qquad \mu^*(\Phi, \underset{\prime}{\varphi}) = (\underset{\prime}{\mu}^*\Phi, \underset{\prime}{\mu}^*\underset{\prime}{\varphi})$$

e)

$$(6) \quad d(\Phi, \underset{\prime}{\varphi}) = (d\Phi, \underset{\prime}{\varphi}) + (\overline{\Phi}, d\varphi) = (d\Phi, \underset{\prime}{\varphi}) + (-1)^q(\Phi, d\varphi)$$

si Φ est une q-forme.

Nous allons maintenant étudier l'opération $(\Phi, \underset{\prime}{\varphi})$ pour différentes applications bilinéaires $l, m \to (l, m)$: ces opérations jouiront donc des propriétés *a*), *b*), *c*), *d*), *e*), ci-dessus que nous ne rappellerons pas.

B) *Produit d'une forme vectorielle par une forme homomorphisme.* — Soient M et P comme ci-dessus et $L = \mathfrak{L}(M, P) = P \otimes M^*$ l'espace vectoriel des applications linéaires de M dans P. Notons $h.X$ le transformé de $X \in M$ par $h \in L$: l'application $h, X \to h.X$ est une application bilinéaire de $L \times M$ dans P et si φ (resp. Φ) est une forme à valeurs dans M (resp. dans $\mathfrak{L}(M, P)$), la forme $\Phi.\varphi$ est une forme à valeurs dans P bien définie par l'alinéa A).

M (resp. P) étant rapporté à la base $\{e_A\}$ (resp. $\{f_a\}$), rapportons $\mathfrak{L}(M, P)$ à sa base $\{\varepsilon_a^A\}$ associée aux deux précédentes et définie par

(7) $\varepsilon_a^A . e_B = \delta_B^A f_a$ (δ_B^A symbole de Kronecker).

On a donc pour toute forme φ (resp. Φ)

$$\varphi = e_B \otimes \varphi^B, \qquad \Phi = \varepsilon_a^A \otimes \Phi_A^a$$

d'où

$$\Phi . \varphi = \varepsilon_a^A . e_B \otimes \Phi_A^a \wedge \varphi^B = \delta_B^A f_a \otimes \Phi_A^a \wedge \varphi^B$$

soit

$$\Phi . \varphi = f_a \otimes \Phi_A^a \wedge \varphi^A. \tag{8}$$

Cas où Φ *est une* O-*forme.* Soit une décomposition quelconque en sommes de produits tensoriels

$$\Phi = h_\alpha \otimes \Phi^\alpha \qquad \text{et} \qquad \varphi = e_i \otimes \varphi^i.$$

D'après les formules (1) et (5, § 1) il vient pour $\mathfrak{T}_x \in T_x$

$$\langle \Phi . \varphi, \mathfrak{T}_x \rangle = h_\alpha . e_i \langle \Phi_x^\alpha \wedge \varphi_x^i, \mathfrak{T}_x \rangle$$

et comme les Φ_x^α sont des scalaires

$$\langle \Phi . \varphi, \mathfrak{T}_x \rangle = (h_\alpha \Phi_x^\alpha) . e_i \langle \varphi_x^i, \mathfrak{T}_x \rangle = \Phi_x . \langle \varphi, \mathfrak{T}_x \rangle$$

c'est-à-dire, avec les notations les plus simples,

$$\langle \Phi . \varphi, \mathfrak{T}_x \rangle = \Phi_x . \varphi(\mathfrak{T}_x). \tag{9}$$

Si de plus Φ est une O-forme constante, c'est-à-dire un homomorphisme déterminé de M dans P, il sera commode par la suite d'utiliser la notation particulière

$$h . \varphi = h(\varphi)$$

et les formules (1), (5), (6) deviennent respectivement

$$(10) \qquad h(e_i \otimes \varphi^i) = h(e_i) \otimes \varphi^i$$

d'où d'après (5, § 1)

$$\langle h(\varphi), \mathfrak{T}\rangle, = h(e_i)\langle \varphi^i, \mathfrak{T}\rangle = h(\varphi(\mathfrak{T}))$$

$$(11) \qquad \mu^* h(\varphi) = h(\mu^* \varphi)$$

$$(12) \qquad dh(\varphi) = h(d\varphi).$$

C) *Cas où* P = M *et* L = $\mathcal{L}$ (M) espace vectoriel des endomorphismes de M. Si g et $h \in \mathcal{L}(M)$, le produit $g.h$ des endomorphismes est une fonction bilinéaire à valeurs dans $\mathcal{L}(M)$: l'alinéa A) permet donc de définir le produit $\Psi.\Phi$ de deux formes Ψ et Φ à valeurs dans $\mathcal{L}(M)$, produit qui est encore à valeurs dans $\mathcal{L}(M)$. Si l'on rapporte M à une base $\{e_A\}$ et $\mathcal{L}(M)$ à la base correspondante $\{\varepsilon^A_B\}$ telle que

$$(13) \qquad \varepsilon^A_B . e_C = \delta^A_C . e_B$$

on a $\Phi = \varepsilon^A_B \otimes \Phi^B_A$ — nous dirons que (Φ^B_A) est la matrice de Φ dans la base $\{e_A\}$ — et $\Psi = \varepsilon^C_D \otimes \Psi^D_C$, et de la table de multiplication dans $\mathcal{L}(M)$

$$(14) \qquad \varepsilon^C_D . \varepsilon^A_B = \delta^C_B \varepsilon^A_D$$

on déduit la règle de calcul de $\Psi.\Phi$ à l'aide des composantes de Ψ et Φ

$$(15) \qquad \Psi.\Phi = \varepsilon^A_D \otimes \Psi^D_B \wedge \Phi^B_A$$

c'est-à-dire que la matrice du produit est le produit des matrices. Outre les propriétés habituelles de l'alinéa A), ce produit est doublement associatif :

$$(16) \qquad \Psi.(\Phi.\varphi) = (\Psi.\Phi).\varphi$$

$$(17) \qquad \Theta.(\Psi.\Phi) = (\Theta.\Psi).\Phi$$

où φ est à valeurs dans M; Θ, Ψ, Φ à valeurs dans $\mathcal{L}(M)$. On a bien entendu un produit ayant des proriétés analogues $\Phi_2.\Phi_1$, d'une forme Φ_1 à valeurs dans $\mathcal{L}(M, P)$ par une forme Φ_2 à valeurs dans $\mathcal{L}(P, Q)$.

D) *Cas où* M *est une algèbre de Lie* L. — Le crochet de l'algèbre L étant une fonction bilinéaire à valeurs dans L, l'alinéa A) permet d'étendre l'opération crochet aux formes à valeurs dans L. Si

$$\Phi = \varepsilon_A \otimes \Phi^A \quad \text{et} \quad \Psi = \varepsilon_B \otimes \Psi^B,$$

la formule (1) devient

$$(18) \qquad [\Phi, \Psi] = [\varepsilon_A, \varepsilon_B] \otimes (\Phi^A \wedge \Psi^B).$$

En dehors des propriétés de l'alinéa A) ce crochet jouit d'une propriété de commutation :

$$(19) \qquad [\Phi, \Psi] = (-1)^{qq'+1} [\Psi, \Phi]$$

et satisfait à une identité de Jacobi généralisée :

(20)
$$(-1)^{qq''}[\Phi, [\Psi, \Theta]] + (-1)^{q'q}[\Psi, [\Theta, \Phi]] + (-1)^{q''q'}[\Theta, [\Phi, \Psi]] = 0$$

où q, q', q'', sont les degrés respectifs de Φ, Ψ, Θ.

Considérons en particulier $L = \mathfrak{L}(M)$; en gardant les notations de l'alinéa précédent on a

$$\Phi = \varepsilon_B^A \otimes \Phi_A^B \qquad \Psi = \varepsilon_D^C \otimes \Psi^D$$
$$[\Phi, \Psi] = [\varepsilon_B^A, \varepsilon_D^C] \otimes (\Phi_A^B \wedge \Psi_C^D)$$

or d'après (14)

$$[\varepsilon_B^A, \varepsilon_D^C] = \delta_D^A \varepsilon_B^C - \delta_B^C \varepsilon_D^A$$

d'où

$$[\Phi, \Psi] = \varepsilon_B^C \otimes (\Phi_A^B \wedge \Psi_C^A) - \varepsilon_D^A \otimes (\Phi_A^B \wedge \Psi_B^D)$$

soit d'après (15)

$$(21) \qquad [\Phi, \Psi] = \Phi . \Psi - (-1)^{qq'} \Psi . \Phi .$$

En particulier si Φ est une forme de degré impair, on a

$$(22) \qquad [\Phi, \Phi] = 2\Phi . \Phi .$$

Soit enfin h une représentation fixe de l'algèbre de Lie L dans l'algèbre de Lie L_1 : c'est en particulier un homomorphisme d'espaces vectoriels et il satisfait aux propriétés de l'alinéa B). De plus, d'après (10) et (18)

$$h([\Phi, \Psi]) = h([\varepsilon_A, \varepsilon_B]) \otimes \Phi^A \wedge \Psi^B = [h(\varepsilon_A), h(\varepsilon_B)] \otimes \Phi^A \wedge \Psi^B$$
$$= [h(\varepsilon_A) \otimes \Phi^A, \; h(\varepsilon_B) \otimes \Psi^B]$$

c'est-à-dire

$$(23) \qquad h([\Phi, \Psi]) = [h(\Phi), h(\Psi)]$$

E) Soit enfin $\omega = e_i \otimes \omega^i$ une 1-forme à valeurs dans M. Nous désignerons par $\overset{q}{\wedge} \omega$ la q-forme à valeurs dans $\overset{q}{\wedge} M$ dont la restriction à T_x est $\overset{q}{\wedge}\omega_x$. Pour calculer ses composantes, il suffit de calculer sa valeur pour un q-vecteur décomposable. Or, par définition de la puissance extérieure d'une application linéaire

$$\begin{aligned}
\overset{q}{\wedge}\omega(\mathfrak{V}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{V}_q) &= \omega(\mathfrak{V}_1) \wedge \ldots \wedge \omega(\mathfrak{V}_q)\\
&= \omega^{i_1}(\mathfrak{V}_1)\,\omega^{i_2}(\mathfrak{V}_2)\ldots\omega^{i_q}(\mathfrak{V}_q)\,e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\\
&= \frac{1}{q\,!}\,\varepsilon^{i_1\ldots i_q}_{l_1\ldots l_q}\omega^{l_1}(\mathfrak{V}_1)\ldots\omega^{l_q}(\mathfrak{V}_q)\,e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\\
&= \frac{1}{q\,!}\langle\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q},\ \mathfrak{V}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{V}_q\rangle\,e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_q}\langle\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}.\ \mathfrak{V}_1\wedge\ldots\wedge\mathfrak{V}_q\rangle\,e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}
\end{aligned}$$

ce qui montre d'après (5, § 1) que les composantes de $\overset{q}{\wedge}\omega$ dans la base $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}(i_1<\cdots<i_q)$ de $\overset{q}{\wedge}M$ sont $\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$; on a donc

$$(24)\qquad \begin{aligned}
\overset{q}{\wedge}\omega &= \sum_{i_1<\cdots<i_q} e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\otimes\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}\\
&= \frac{1}{q\,!}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_q}\otimes\omega^{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}.
\end{aligned}$$

3. — Tenseurs et formes tensorielles sur un espace fibré principal.

Nous utiliserons la terminologie de A. Lichnérowicz que nous rappellerons d'abord brièvement. Soient H(X, G) un e.f.p., M un espace vectoriel et $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de G dans M. Un tenseur sur H de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans M est une fonction continue t sur H à valeurs dans M telle que

$$t(z.g) = \mathcal{R}(g^{-1}).t(z), \qquad g\in G, \quad z\in H.$$

Il y a un isomorphisme canonique entre l'espace vectoriel des tenseurs sur H de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans M, et l'espace vectoriel des sections de l'e.f. M(H) obtenu par modelage de M sur H, G opérant sur M par $\mathcal{R}$ (G)(cf. déf. I, 2). La section correspondant à t dans cet isomorphisme est

$$x \to \alpha(t(z),\ z), \qquad (pz = x)$$

qui est bien définie puisque

$$(t(z.g),\ z.g) = (\mathcal{R}(g^{-1})\,t(z),\ z.g) \sim (t(z),\ z).$$

Si de plus H(X, G) est un e.f.p. différentiable notons Θ_h (resp. V_h) l'espace vectoriel tangent en $h \in H$ à H (resp. à la fibre H_{ph} de h). Une q-forme Λ sur H à valeurs dans M est dite de type $\mathcal{R}(G)$ si

$$(1) \qquad D_g^*\Lambda = \mathcal{R}(g^{-1}).\Lambda.$$

C'est une q-forme tensorielle de type $\mathcal{R}(G)$ si de plus

$$(2) \qquad \Lambda(\mathcal{T}) = 0 \quad \text{dès que} \quad p\mathcal{T} = 0, \qquad \mathcal{T} \in \overset{q}{\Lambda}\Theta_h$$

p représentant ici le q^e puissance extérieure de l'application linéaire tangente à p au point h, notation simplifiée qui sera systématiquement utilisée dans ce paragraphe pour toutes les applications linéaires et leurs puissances extérieures. Considérons un tenseur sur H comme une o-forme, et soit $\{U_\alpha\}$ un recouvrement ouvert de H muni de sections locales s_α, telles que

$$(3) \qquad s_\beta(x) = s_\alpha(x).g_{\alpha\beta}(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

où $g_{\alpha\beta}$ est une application différentiable dans G. On établit que les formes (resp. fonctions) locales sur X à valeurs dans M

$$(4) \qquad \Lambda_\alpha = s_\alpha^*\Lambda$$

sont liées dans $U_\alpha \cap U_\beta$ par

$$(5) \qquad \Lambda_\beta = \mathcal{R}(g_{\alpha\beta}^{-1}).\Lambda_\alpha$$

réciproquement une famille de formes locales Λ_α satisfaisant à (5) détermine une forme unique Λ sur H à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}(G)$ par la seule condition (4). Cette propriété consiste à remarquer qu'une forme tensorielle est bien déterminée par la forme qu'elle induit sur les sous-variétés transversales aux fibres que constituent les images des sections. On voit plus généralement qu'elle est bien déterminée par la forme tensorielle qu'elle induit sur un s.e.f.p. $H' \subset H$.

Soit f un X-homomorphisme de H'(X, G') dans H(X, G) compatible avec un homomorphisme $\rho : G' \to G$; $f^*\Lambda$ est une q-forme tensorielle sur H' à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}'(G')$ où $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \rho$. Réciproquement étant donnée sur H' une forme tensorielle Ψ de type $\mathcal{R}'(G')$ à valeurs dans M, s'il existe une représentation linéaire $\mathcal{R}$ de G dans M telle que $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \rho$ — et il suffit pour cela si ρ est surjective que le noyau de $\mathcal{R}'$ contienne celui de ρ — il existe une forme tensorielle Λ sur H bien déterminée de type $\mathcal{R}(G)$ telle que $\Psi = f^*\Lambda$. Nous dirons que Ψ est *projetable sur* H suivant Λ (bien que H' se projette seulement *dans* H).

Nous allons maintenant préciser la notion de *tenseur associé à une forme tensorielle* Λ. Soit E l'e.f.p. des repères linéaires de la variété X (cf. ch. III, § 1) de groupe structural $L_n = Gl(n, R)$; $z \in E$ est un isomorphisme de R_n sur T_x. Soit $(h, z) \in H \boxtimes E$ $(p_H h = p_E z = x)$ (déf. I, 2, 2,); Λ définit une application linéaire $t(h, z)$ de $\overset{q}{\wedge} R_n$ dans M par

$$(6) \qquad \begin{cases} t(h, z).u = \Lambda(\mathcal{T}_h) \\ \text{si} \quad \mathcal{T}_h \in \overset{q}{\wedge} \Theta_h, \quad u \in \overset{q}{\wedge} R_n, \quad z.u = p.\mathcal{T}_h. \end{cases}$$

Cette application est bien définie puisque, d'après (2) la valeur de $\Lambda(\mathcal{T}_h)$ ne dépend que de celle de $p\mathcal{T}_h$, et que p est surjective. Sa linéarité étant évidente, $t(h, z) \in M \otimes \overset{q}{\wedge} R_n^*$. Je dis que la fonction t, $(h, z) \to t(h, z)$, est un tenseur sur $H \boxtimes E$; calculons en effet $t(h.g, z.l)$ $l \in L_n$, $g \in G$:

$$\begin{cases} t(h.g, z.l).u = \Lambda(\mathcal{T}_{hg}) \\ u \in \overset{q}{\wedge} R_n, \quad \mathcal{T}_{hg} \in \overset{q}{\wedge} \Theta_{hg}, \quad (z.l).u = p\mathcal{T}_{hg}. \end{cases}$$

Soit $v = l.u \in \overset{q}{\wedge} R_n$; alors $z.v = p.\mathcal{T}_{hg} = p.D_g^{-1}\mathcal{T}_{hg}$ où $D_g^{-1}.\mathcal{T}_{hg} \in \Theta_h$; par conséquent, d'après (6),

$$t(h,z).v = \Lambda(D_g^{-1}.\mathcal{T}_{hg}) = \mathcal{R}(g).\Lambda(\mathcal{T}_{hg})$$

et $\qquad \Lambda(\mathcal{T}_{hg}) = \mathcal{R}(g^{-1}).[t(h, z).lu)] = t(h.g, z.l).u$

ou $\qquad (\mathcal{R}(g^{-1}) \circ t(h, z) \circ l)u = t(h.g, z.l).u$

quel que soit $u \in \overset{q}{\wedge} R_n$; c'est-à-dire en revenant à des notations complètes

$$(7) \qquad t(h.g, z.l) = \left(R(g^{-1}) \otimes \overset{q}{\wedge} l\right).t(h, z)$$

te t est un tenseur de type $\rho(G \times L_n)$ avec $\rho(g, l) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} l^{-1}$. On voit immédiatement à l'aide de sections qu'il est différentiable de même classe que Λ.

On peut donner à la relation entre Λ et t une forme très simple. Remarquons d'abord que les relations (6) sont équivalentes à

$$\Lambda(\mathfrak{T}_h) = t(h,\ z).z^{-1}.p\mathfrak{T}_h \qquad \text{où} \qquad p = p_{\mathrm{H}}.$$

Soit f (resp. g) la projection naturelle de $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$ sur H (resp. E). On a évidemment $p_{\mathrm{H}} \circ f = p_{\mathrm{E}} \circ g$. $\Psi = f^*\Lambda$ est une forme tensorielle sur $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$ projetable sur H, dont la donnée équivaut à celle de Λ.

$$\Psi(\mathfrak{T}_{(h,z)}) = \Lambda(f(\mathfrak{T}_{(h,z)}) = t(h,\ z).z^{-1}p_{\mathrm{H}}f(\mathfrak{T}_{(h,z)}) = t(h,\ z).z^{-1}p_{\mathrm{E}}g(\mathfrak{T}_{(h,z)})$$

or $z^{-1}p_{\mathrm{E}}$ est la 1-forme fondamentale θ sur E (cf. ch. III, 2) et

$$z^{-1}p_{\mathrm{E}}g(\mathfrak{T}_{(h,z)}) = \langle g^*\theta,\ \mathfrak{T}_{(h,z)}\rangle$$

de sorte que

$$\Psi(\mathfrak{T}_{(h,z)}) = t(h,\ z).\langle g^*\theta,\ \mathfrak{T}_{(h,z)}\rangle = \langle t.g^*\theta,\ \mathfrak{T}_{(h,z)}\rangle$$

et d'après la relation (9) § 2 ceci exprime $\Psi = t.g^*\theta$. En revenant à des notations complètes, nous énoncerons :

Définition II, 3. — *Λ étant une q-forme sur l'e.f.p.* H(X, G) *de type* $\mathfrak{R}(\mathrm{G})$ *à valeurs dans* M, *le tenseur associé à* Λ — $t\Lambda$ — *est le tenseur sur* $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$ *à valeurs dans* $\mathrm{M} \otimes \overset{q}{\wedge} \mathrm{R}^{n*}$ *et de type* $\rho(\mathrm{G} \times \mathrm{L}_n)$, *où* $\rho(g,\ l) = \mathfrak{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} l^{-1}$, *défini univoquement par la relation*

$$f^*\Lambda = (t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} g^*\theta\right). \tag{8}$$

D'après la formule (24) § 2 les composantes dans une base $\{e^{\mathrm{A}}\}$ de M, la base canonique de R^n et les bases associées des autres espaces, des trois formes qui interviennent dans (8) sont liées par les formules explicites

$$\begin{aligned}(f^*\Lambda)^{\mathrm{A}} &= \sum_{i_1<\cdots<i_q} (t\Lambda)^{\mathrm{A}}_{i_1\cdots i_q}((g^*\theta)^{i_1} \wedge \ldots \wedge (g^*\theta)^{i_q}) \\ &= \frac{1}{q!}(t\Lambda)^{\mathrm{A}}_{i_1\cdots i_q} g^*(\theta^{i_1} \wedge \ldots \wedge \theta^{i_q})\end{aligned}$$

où, à la deuxième ligne $(t\Lambda)^{\mathrm{A}}_{i_1\cdots i_q}$, est antisymétrique en $i_1,\ i_2,\ \ldots\ i_q$.

Dans le second membre de (8) se trouve le produit d'une q-forme tensorielle par une o-forme tensorielle — et ce produit est une q-forme tensorielle. Plus généralement.

PROPOSITION II, 3, 1. — *Si* φ *est une forme tensorielle de type* $\rho(G)$ *à valeurs dans l'espace vectoriel* M, *et* Φ *une forme tensorielle à valeurs dans* $\mathcal{L}(M, P)$ *de type* $\mathcal{G}(G)$ *où* $\mathcal{G}(g) = \mathcal{R}(g) \otimes \rho(g^{-1})$ — *alors, la forme* $\Phi.\varphi$ *est une forme tensorielle de type* $\mathcal{R}(G)$ *à valeurs dans* P.

En effet, d'après la formule (5) § 2

$$D_g^*(\Phi.\varphi) = (D_g^*\Phi).(D_g^*\varphi) = (\mathcal{G}(g^{-1}).\Phi).(\rho(g^{-1}).\varphi).$$

or, $\mathcal{G}(g^{-1}).\Phi = \mathcal{R}(g^{-1}).\Phi.\rho(g)$ (produit de la o-forme constante $\rho(g)$ à valeurs dans $\mathcal{L}(M)$ par la forme Φ à valeurs dans $\mathcal{L}(M, P)$, par la o-forme constante $\mathcal{R}(g^{-1})$ à valeurs dans $\mathcal{L}(P)$: produit qui est associatif d'après (C) § 2) et par associativité :

$$D_g^*(\Phi.\varphi) = (\mathcal{R}(g^{-1}).\Phi.\rho(g)).\rho(g^{-1}).\varphi = \mathcal{R}(g^{-1}).(\Phi.\varphi)$$

$\Phi.\varphi$ est donc de type $\mathcal{R}(G)$. Pour montrer que de plus

$$\langle \Phi.\varphi, \mathcal{C}_h \rangle = 0$$

pour tout $\mathcal{C}_h \in \wedge \Theta_h$ tel que $p\mathcal{C}_h = 0$, il suffit de le montrer pour des $\mathcal{C}_h$ décomposables : et c'est évident sur les composantes $\Phi_A^a \wedge \varphi^A$ de $\Phi.\varphi$ quand on les exprime dans une base de Θ_h dont les premiers vecteurs engendrent V_h.

La proposition (II, 3, 1) contient une réciproque à la définition du tenseur associé :

PROPOSITION II, 3, 2. — En gardant les notations de la définition (II, 3), *si* λ *est un tenseur sur* $H \boxtimes E$ *à valeurs dans* $M \otimes \overset{q}{\wedge} R^{n*}$ *et de type* $\rho(G \times L_n)$, *il existe une* q*-forme tensorielle de type* $\mathcal{R}(G)$ *à valeurs dans* M *unique dont* λ *soit le tenseur associé.*

En effet, il est immédiat que $\overset{q}{\wedge} g^*\theta$ est une q-forme tensorielle sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $\overset{q}{\wedge} R^n$ et de type $\rho_1(G \times L_n)$ où $\rho_1(g, l) = \overset{q}{\wedge} l$; si l'on désigne par $\mathcal{R}'(G \times L_n)$ la représentation dans M telle que $\mathcal{R}'(g, l) = \mathcal{R}(g)$, $\rho(g, l) = \mathcal{R}'(g, l) \otimes \rho_1(g^{-1}, l^{-1})$. On peut donc appliquer la proposition (II, 3, 1) à la forme $\psi = \lambda.\left(\overset{q}{\wedge} g^*\theta\right)$, qui est une q-forme tensorielle sur

$H \boxtimes E$ à valeurs dans M de type $\mathcal{R}'(G \times L_n)$. Comme d'autre part f est un homomorphisme de $H \boxtimes E$ dans H compatible avec l'homomorphisme trivial $\mathcal{G}\ G \times L_n \rightarrow G$ et que $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \mathcal{G}$, ψ est projetable sur H suivant une forme tensorielle Λ de type $\mathcal{R}(G)$ à valeurs dans M; et $\lambda = t\Lambda$.

4. — Connexions.

A) Soit un e.f.p. différentiable H(X, G). H n'étant provisoirement pas identifié à son e.f.p. associé $\hat{H}$(Ch. I), $\hat{z} \in \hat{H}$ est l'homomorphisme différentiable de G sur H_z :

$$\hat{z}: \qquad g \rightarrow z.g \qquad g \in G,\ z \in H.$$

Son application linéaire tangente à l'identité e de G, soit $\underline{\hat{z}}$, est un isomorphisme de l'algèbre de Lie $\underline{G}$ de G sur V_z. Pour $\lambda \in \underline{G}$ nous noterons encore $\underline{\hat{z}}(\lambda) = z.\lambda$. Soit β la 1-forme *sur les fibres* de H (et non sur H) dont la restriction à V_z est l'isomorphisme inverse $\underline{\hat{z}}^{-1}$: c'est, sur chaque fibre, une forme de type « représentation adjointe de G » — nous dirons plus brièvement « de type adjoint » — :

$$D_g^*\beta = (\text{adj } g^{-1}).\beta.$$

Une connexion infinitésimale γ sur H(X, G) est définie par la donnée d'une 1-forme différentielle π sur H à valeurs dans $\underline{G}$ qui est de type adjoint et dont la restriction aux fibres coïncide avec β.

Cette dernière condition et la simple considération des dimensions montrent que le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_z = \pi_z^{-1}$ (o) de Θ_z est un supplémentaire de V_z qui est ainsi décomposé en une somme directe

$$\Theta_z = V_z \oplus \mathcal{H}_z.$$

Cette décomposition définit deux projecteurs dans Θ_z :

$$V : \Theta_z \rightarrow V_z \text{ dit « partie verticale »;}$$
$$\mathcal{H} : \Theta_z \rightarrow \mathcal{H}_z \text{ dit « partie horizontale »;}$$

suivant les conventions déjà employées, nous noterons encore par la même lettre V (resp. $\mathcal{H}$) l'extension de ces opérateurs à $\wedge \Theta_z$.

Enfin, le champ de plans $z \rightarrow \mathcal{H}_z$, ou champ de connexion, dépend différentiablement de z et est invariant par les translations à droite de G. On montre que réciproquement, un champ de plans $\mathcal{H}_z$ supplémentaire de V_z et jouissant de ces deux dernières propriétés, définit une connexion infinitésimale sur H.

Le champ de connexion définit sur H un système de Pfaff : s'il est complètement intégrable, la connexion γ est dite *intégrable*. Un chemin dans H, image du segment [0, 1] par une application différentiable, est dit *chemin horizontal* s'il est une variété intégrale de ce système. Le groupe d'holonomie ψ_z (resp. groupe d'holonomie restreint σ_z) au point $z \in H$ de la connexion est l'ensemble des $g \in G$ tels que $z.g$ soit joint à z par un chemin horizontal (resp. par un chemin horizontal dont la projection sur X est un lacet homotope à O). On sait que σ_z, sous-groupe connexe par arcs, est un sous-groupe analytique de G et, [13] que c'est la composante connexe par arcs de l'identité de ψ_z. ψ_z est donc un sous-groupe de Lie de G (cf. ch. I, 5).

On appelle nappe d'holonomie H'_z au point $z \in H$ l'ensemble des $z' \in H$ qui peuvent être joints à z par un chemin horizontal. Soit p' la restriction de p à H'_z ; 1°) $p'(H'_z) = X$ puisque X est connexe par arcs et qu'il existe un chemin horizontal au-dessus de tout chemin de X; 2°) on sait [13] que si $z' \in H'_z$, $\psi_{z'} = \psi_z$ d'où $p'^{-1}(pz') = z'.\psi_z$; 3° p' admet des relèvements locaux qui sont des sections locales différentiables de H : cela apparaît dans la construction d'une section locale spéciale de H pour la connexion [14], la différentiabilité de la section se déduisant de celle des solutions d'un système différentiel ordinaire par rapport aux données initiales. D'après la proposition (I, 5, 2) ceci montre que H'_z est un ψ_z-s.e.f.p. différentiable de H. On a là un exemple de s.e.f.p. dont on ne sait pas en général s'il est fermé ou même propre.

B) *Comparaison des connexions.* — Soit f un X-homomorphisme de $H'(X, G')$ dans $H(X, G)$ compatible avec l'homomorphisme ρ de G' dans G. Soient γ' une connexion sur H' de forme π' et $\mathcal{H}'$ son champ de connexion. Soit au point $z = f(z') \in H$ le sous-espace vectoriel $\mathcal{H}_z = f\mathcal{H}_{z'} \subset \Theta_z$. De la

[13] A. Lichnerowicz [22] p. 65.
[14] A. Lichnerowicz [22] p. 117.

seule relation $p \circ f = p'$ découle que $\mathcal{H}_z$ est un supplémentaire de V_z. $\mathcal{H}_z$ est défini pour tout $z \in f(H')$ et univoquement, car si $z = f(z'_1)$ on a

$$z'_1 = z'.g' (g' \in G') \quad \text{avec} \quad f(z'.g') = z = f(z').\rho(g') = z.\rho(g'),$$

de sorte que $\rho(g') = e$ et $D_{\rho(g')} =$ identité de H; alors $\mathcal{H}'_{z'_1} = D_{g'}\mathcal{H}'_{z'}$ puisque $\mathcal{H}'$, champ de connexion, est invariant par translation à droite sur H′ et

$$f\mathcal{H}'_{z'_1} = (f \circ D_{g'})\mathcal{H}'_{z'} = (D_{\rho(g')} \circ f)\mathcal{H}'_{z'} = f\mathcal{H}'_{z'}.$$

On montre de même que le champ $\mathcal{H}$ sur $f(H') \subset H$ est invariant par les translations à droite par $\rho(G') \subset G$: il s'étend donc par translation à droite en un champ défini sur tout H que je note encore $\mathcal{H}$. Ce champ, invariant par translation à droite par construction, dépend différentiablement de z (on le voit à l'aide d'une carte locale de H′) : il définit donc une connexion $\gamma = f(\gamma')$ sur H que nous appellerons l'image par l'homomorphisme f de γ'. Soient $\tilde{\rho}$ la représentation de l'algèbre de Lie $\underline{G}'$ dans $\underline{G}$ définie par ρ (application linéaire tangente au point e') et π la forme de la connexion γ. On voit facilement que

$$f^*\pi = \tilde{\rho}(\pi') \tag{1}$$

et cette relation caractérise π.

En particulier, si $H'(X, G') \subset H(X, G)$ est un G′-s.e.f.p. de H, l'étude précédente s'applique f (resp. ρ) étant l'application identique de H′ dans H (resp. G′ dans G) : nous dirons indifféremment que $\gamma = f(\gamma')$ est *l'extension à* H *de la* H′-*connexion* γ' où, si aucune ambiguïté n'est possible, que γ est une H′-connexion; la formule (1) exprime alors que π' est la forme induite sur H′ par π.

Soit maintenant f une G-représentation (Ch. I, § 3) de $H'(X', G)$ dans $H(X, G)$, induisant l'application $\mu : X' \to X$. On voit de même que, si π est une forme de connexion sur H, $\pi' = f^*\pi$ est une forme de connexion sur H′, le champ de connexion $\mathcal{H}'$ étant alors projetable par f suivant $\mathcal{H}$.

Enfin si γ_1 et γ_2 sont deux connexions sur H(X, G), de formes π_1 et π_2, $\pi_2 - \pi_1 = u$ est une 1-forme tensorielle sur H à valeurs dans $\underline{G}$ et de type adjoint; réciproquement, u étant une 1-forme tensorielle de ce type, $\pi_1 + u$ est une forme de connexion sur H.

C) *Différentielle absolue, formules fondamentales.* — Λ étant une q-forme tensorielle sur H(X, G) de type $\mathfrak{R}(G)$ à valeurs dans M, d'après les formules (1) § 3) et (12) § 2), on obtient par différentiation extérieure $D_g^* d\Lambda = \mathfrak{R}(g^{-1}).d\Lambda$. Alors si γ est une connexion sur H de champ $\mathcal{H}$, les projecteurs associés dans Θ_z étant $\mathcal{H}$ et V, il est évident que la $(q+1)$-forme définie au point z par

$$(\nabla\Lambda)_z = (d\Lambda)_z \circ \mathcal{H}$$

est une $(q+1)$-forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$ à valeurs dans M. C'est *la différentielle absolue de* Λ.

On établit, en utilisant par exemple une carte locale de H, l'expression globale de $\nabla\Lambda$

$$\nabla\Lambda = d\Lambda + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda \tag{2}$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}$ désigne la représentation de $\underline{G}$ dans $\mathfrak{L}(M)$ définie par $\mathfrak{R}$. Le terme $\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda$ désigne donc le produit (§ 2) d'une forme à valeurs dans M par une forme à valeurs dans l'espace $\mathfrak{L}(M)$ des endomorphismes de M.

La forme de courbure Ω de la connexion γ sur H est la 2-forme tensorielle à valeurs dans $\underline{G}$ et de type adjoint

$$\Omega = d\pi + \frac{1}{2}[\pi, \pi]. \tag{3}$$

Sa différentielle absolue $\nabla\Omega$ est la 3-forme tensorielle

$$\nabla\Omega = d\Omega + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Omega$$

où $\tilde{\mathfrak{R}}$ est la représentation adjointe de $\underline{G}$. Alors si $\lambda, \mu \in \underline{G}$

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda).\mu = [\lambda, \mu]$$

d'où
$$\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Omega = [\pi, \Omega] \qquad (\S\ 2)$$

alors
$$\nabla\Omega = \frac{1}{2}d[\pi, \pi] + [\pi, d\pi] + \frac{1}{2}[\pi, [\pi, \pi]]$$
$$= \frac{1}{2}[d\pi, \pi] + \frac{1}{2}[\pi, d\pi] + \frac{1}{2}[\pi, [\pi, \pi]]$$

or, $d\pi$ étant de degré pair $[\pi, d\pi] = -[d\pi, \pi]$ (19, § 2) et l'identité de Jacobi (20, § 2) appliquée à trois formes égales donne $[\pi, [\pi, \pi]] = 0$. On a donc

$$\nabla\Omega = d\Omega + [\pi, \Omega] = 0 \tag{4}$$

c'est l'identité de Bianchi pour la courbure.

Si Λ est une forme tensorielle de type $\mathfrak{R}(G)$ sur H calculons sa différentielle absolue seconde $\nabla^2\Lambda = \nabla(\nabla\Lambda)$. $\nabla\Lambda$ étant de même type que Λ la formule (2) donne $\nabla^2\Lambda = d(\nabla\Lambda) + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\nabla\Lambda$ où

$$\begin{aligned} d\nabla\Lambda &= d(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda) = (d\tilde{\mathfrak{R}}(\pi)).\Lambda - \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda && (6,\ \S\ 2) \\ &= \tilde{\mathfrak{R}}(d\pi).\Lambda - \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda && (12,\ \S\ 2) \end{aligned}$$

et

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\nabla\Lambda = \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda + \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda)$$

or

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\Lambda) &= (\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).\tilde{\mathfrak{R}}(\pi)).\Lambda && (16,\ \S\ 2) \\ &= \frac{1}{2}[\tilde{\mathfrak{R}}(\pi), \tilde{\mathfrak{R}}(\pi)].\Lambda && (22,\ \S\ 2) \\ &= \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi]).\Lambda && (23,\ \S\ 2) \end{aligned}$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} \nabla^2\Lambda &= (\tilde{\mathfrak{R}}(d\pi).\Lambda - \tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda) + \left(\tilde{\mathfrak{R}}(\pi).d\Lambda + \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi]).\Lambda\right) \\ &= \tilde{\mathfrak{R}}(d\pi).\Lambda + \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi]).\Lambda \\ &= (\tilde{\mathfrak{R}}(d\pi) + \frac{1}{2}\tilde{\mathfrak{R}}([\pi, \pi])).\Lambda && (3,\ \S\ 2) \\ &= \tilde{\mathfrak{R}}\left(d\pi + \frac{1}{2}[\pi, \pi]\right).\Lambda && (4,\ \S\ 2) \end{aligned}$$

soit enfin

$$(5) \qquad \nabla^2\Lambda = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\Lambda.$$

Nous allons maintenant calculer la différentielle absolue de la forme tensorielle $\Phi.\varphi$ définie dans la proposition (II, 3, 1). Φ est une forme à valeurs dans $\mathfrak{L}(M, P)$ de type $\mathfrak{I}(G)$ où $\mathfrak{I}(g) = \mathfrak{R}(g) \otimes \rho(g^{-1})$ et

$$(6) \qquad \nabla\Phi = d\Phi + \tilde{\mathfrak{I}}(\pi).\Phi.$$

Si $\{\varepsilon_\rho\}$ (resp. $\{h_\alpha\}$) est une base de $\underline{G}$ (resp. de $\mathfrak{L}(M, P)$), on a

$$\pi = \varepsilon_\rho \otimes \pi^\rho, \qquad \tilde{\mathfrak{I}}(\pi) = \tilde{\mathfrak{I}}(\varepsilon_\rho) \otimes \pi^\rho, \qquad \Phi = h_\alpha \otimes \Phi^\alpha$$

d'où

$$(7) \qquad \tilde{\mathfrak{I}}(\pi).\Phi = \tilde{\mathfrak{I}}(\varepsilon_\rho).h_\alpha \otimes \pi^\rho \wedge \Phi^\alpha$$

les formes π^ρ et Φ^α étant des formes scalaires. On est donc ramené à calculer $\tilde{\mathcal{I}}(\lambda).h$ ($\lambda \in \underline{G}$, $h \in \mathcal{L}(M, P)$). Par définition, pour $u \in R$

$$\tilde{\mathcal{I}}(\lambda).h = \lim_{u \to 0} \frac{1}{u} (\mathcal{I}(\exp \lambda u).h - h)$$

Or,

$$\mathcal{I}(g).h = \mathcal{R}(g).h.\rho(g^{-1})$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\exp \lambda u).h &= \mathcal{R}(\exp \lambda u).h.\rho(\exp - \lambda u)\\ &= \exp \tilde{\mathcal{R}}(\lambda u).h.\ \exp \tilde{\rho}(-\lambda u)\\ &= [\tilde{\mathcal{R}}(0) + u\tilde{\mathcal{R}}(\lambda) + \cdots].h.[\tilde{\rho}(0) - u\tilde{\rho}(\lambda) + \cdots]\\ &= h + u[\tilde{\mathcal{R}}(\lambda).h - h.\tilde{\rho}(\lambda)] + \cdots\end{aligned}$$

et enfin $\tilde{\mathcal{I}}(\lambda).h = \tilde{\mathcal{R}}(\lambda).h - h.\tilde{\rho}(\lambda)$. En reportant dans (7) puis dans (6), il vient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}}(\pi).\Phi &= [\tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_\rho).h_\alpha - h_\alpha.\tilde{\rho}(\varepsilon_\rho)] \otimes \pi^\rho \wedge \Phi^\alpha\\ &= \tilde{\mathcal{R}}(\pi).\Phi - [h_\alpha.\tilde{\rho}(\varepsilon_\rho)] \otimes (-1)^p\Phi^\alpha \wedge \pi^\rho\end{aligned}$$

si Φ est de degré p; c'est-à-dire

$$\tilde{\mathcal{I}}(\pi).\Phi = \tilde{\mathcal{R}}(\pi).\Phi - (-1)^p\Phi.\tilde{\rho}(\pi)$$

d'où

$$\nabla\Phi = d\Phi + \tilde{\mathcal{R}}(\pi).\Phi - (-1)^p\Phi.\tilde{\rho}(\pi).$$

Comme, d'autre part

$$\nabla\varphi = d\varphi + \tilde{\rho}(\pi).\varphi$$

on a

$$\begin{aligned}\nabla\Phi.\varphi + (-1)^p\Phi.\nabla\varphi &= d\Phi.\varphi + (-1)^p\Phi.d\varphi + \tilde{\mathcal{R}}(\pi).\Phi.\varphi\\ &= d(\Phi.\varphi) + \tilde{\mathcal{R}}(\pi).(\Phi.\varphi)\end{aligned}$$

soit

$$\nabla(\Phi.\varphi) = \nabla\Phi.\varphi + \overline{\Phi}.\nabla\varphi \tag{8}$$

si Φ n'est pas supposée homogène.

5. — Formes vectorielles complexes.

Soient N un espace vectoriel réel, N^C son complexifié et M un espace vectoriel complexe, tous de dimension finie. Si, f est une application linéaire (sur C) de N^C dans M, $f \in M \otimes_C (N^C)^*$, sa restriction $\underline{f}$ à $N \subset N^C$ est une application linéaire (sur R) dans M : $\underline{f} \in \bar{M} \otimes_R N^*$. Inversement si $g \in M \otimes_R N^*$, elle s'étend par linéarité sur les complexes en une application C-linéaire $\bar{g}$ de N^C dans M : tout $u \in N^C$ pouvant s'écrire $u = x + iy$ ($x, y \in N$; $i = \sqrt{-1}$), il suffit de poser $\bar{g}(u) = g(x) + ig(y)$ et $\bar{g} \in M \otimes_C (N^C)^*$. Ainsi, l'application $g \to \bar{g}$ est un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels sur C, de $M \otimes_R N^*$ sur $M \otimes_C (N^C)^*$. Si l'on prend pour M le corps des complexes, on trouve que l'espace $C \otimes_R N^*$ des formes sur N à valeurs complexes est canoniquement isomorphe au dual $(N^C)^*$ de N^C.

Si $N = \wedge T_x$, $N^C = \wedge T_x^C$(T_x espace vectoriel tangent en x à la variété V). Soit $\underset{\cdot}{\varphi}_x$ une forme extérieure (réelle) en x à valeurs dans M; elle s'écrit : $\underset{\cdot}{\varphi}_x = e_j \otimes \underset{\cdot}{\varphi}^j_x$ ($j = 1, 2, \ldots, 2p$), $\{e_j\}$ étant une base de M sur R et les $\underset{\cdot}{\varphi}^j_x$ des formes extérieures à valeurs réelles. Soient maintenant $\bar{\underset{\cdot}{\varphi}}_x$ l'extension de $\underset{\cdot}{\varphi}_x$ à T_x^C et $\{e_A\}$ une base de M sur C ($A = 1, 2, \ldots, p$) comme $\bar{\underset{\cdot}{\varphi}}_x \in M \otimes_C (\wedge T_x^C)^*$ on a $\bar{\underset{\cdot}{\varphi}}_x = e_A \otimes \underset{\cdot}{\varphi}^A_x$ où les $\underset{\cdot}{\varphi}^A_x$ sont des formes extérieures (complexes) sur T_x^C. Alors, $\underset{\cdot}{\varphi}_x$ considéré comme restriction à T_x de $\bar{\underset{\cdot}{\varphi}}_x$ peut s'écrire $\underset{\cdot}{\varphi}_x = e_A \otimes \underline{\underset{\cdot}{\varphi}^A_x}$ où les $\underline{\underset{\cdot}{\varphi}^A_x}$, restrictions à T_x des $\underset{\cdot}{\varphi}^A_x$, sont des formes extérieures sur T_x à valeurs complexes. Nous identifierons désormais $\underset{\cdot}{\varphi}_x$ et $\bar{\underset{\cdot}{\varphi}}_x$ (resp. $\underset{\cdot}{\varphi}^A_x$ et $\underline{\underset{\cdot}{\varphi}^A_x}$) de sorte que une *forme extérieure à valeurs vectorielles complexes* (*dans* M) *au point x écrite*

$$(1) \qquad \underset{\cdot}{\varphi}_x = e_A \otimes \underset{\cdot}{\varphi}^A_x$$

où les $\underset{\cdot}{\varphi}^A_x$ *sont des formes extérieures sur* T_x *à valeurs complexes, peut être interprétée soit comme application linéaire* (*réelle*) *de* $\wedge T_x$ *dans* M *soit comme application linéaire* (*complexe*) *de* $\wedge T_x^C$ *dans* M.

Enfin, si $\underset{\cdot}{\varphi}$ est une forme différentielle extérieure sur V à valeurs dans M, on l'écrira encore

$$(2) \qquad \underset{\cdot}{\varphi} = e_A \otimes \underset{\cdot}{\varphi}^A$$

où les $\underset{\cdot}{\varphi}^A$ sont des formes différentielles extérieures à valeur complexe; cette notation signifiant simplement, comme au paragraphe 1, que la restriction à T_x de $\underset{\cdot}{\varphi}$ est donnée par (1).

Ces précisions données, la totalité des opérations étudiées aux paragraphes 1 et 2 s'exprime, à l'aide des composantes complexes définies par (2), formellement comme dans le cas réel.

On a de même l'équivalent de la définition (II, 3) et de la proposition (II, 3, 2) :

Proposition II, 5. — *Soit* Λ *une q-forme tensorielle sur* H(X, G) *à valeurs dans un espace vectoriel complexe* M *et de type* $\mathcal{R}(G)$. Le tenseur complexe associé à Λ, $t^{C}\Lambda$, *est le tenseur sur* $H \boxtimes E^{C}$ *à valeurs dans* $M \otimes_{C} \overset{q}{\Lambda} C^{m*}$ *et de type* $\rho(G \times CL_m)$ *où* $\rho(g, l) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\Lambda} l^{-1}$ *défini univoquement par*

$$F^*\Lambda = (t^{C}\Lambda) . (\overset{q}{\Lambda} G^*\theta^{C}). \tag{2}$$

Réciproquement $t^{C}\Lambda$ *étant un tenseur donné de ce type, il est le tenseur associé à une forme* Λ *sur* H *bien définie par* (2).

Dans cet énoncé, E^{C} est l'espace des repères complexes de X (Ch. III, § 1) et θ^{C} sa forme fondamentale; F (resp. G) l'application canonique de $H \boxtimes E^{C}$ sur H (resp. E^{C}). Remarquons que, Λ définissant une forme tensorielle réelle à valeurs dans l'espace vectoriel réel sous-jacent à M, $t\Lambda$ est un tenseur sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $M \otimes_{R} \overset{q}{\Lambda} R^{m*}$; on voit que $t\Lambda$ est la restriction à $H \boxtimes E \subset H \boxtimes E^{C}$ de $t^{C}\Lambda$ ce qui a un sens puisqu'il y a un isomorphisme canonique de $M \otimes_{C} \overset{q}{\Lambda} C^{m*}$ sur $M \otimes_{R} \overset{q}{\Lambda} R^{m*}$:

CHAPITRE III

ESPACES DE REPÈRES. G-STRUCTURES

1. — Espaces de repères réels ou complexes.

Soit $T = T(X, R^m)$ l'e.f. des vecteurs tangents à la variété différentiable X de classe C^s. L'e.f.p. associé $E = E(X) = \hat{T}(X, L_m)$ est un e.f.p. différentiable C^{s-1}; $z \in E$ est un repère (cf. I, 3) au point $x \in X$ de la structure fibrée de T; c'est-à-dire un isomorphisme d'espaces vectoriels de R^m sur $T_x (x = pz)$. z peut être identifié à l'image $\{e_i\}$ par z de la base canonique $\{f_i\}$ de R^m, de sorte que E s'identifie à l'espace des bases des espaces vectoriels $T_x (x \in X)$. Nous utiliserons les deux interprétations. E sera appelé *l'espace des repères linéaires réels de* X, ou plus simplement *espace des repères de* X.

L'isomorphisme inverse, $\varphi = z^{-1}$, $T_x \to R^m$, est un *co-repère* en x : c'est un 1-forme au point x à valeurs dans R^m (cf. II, 1). Ses composantes φ^i dans la base canonique de R^m sont les 1-formes scalaires sur T_x définies par

$$(1) \qquad \varphi = f_j \otimes \varphi^j$$

alors, $f_i = z^{-1}(z . f_i) = \langle \varphi, e_i \rangle = f_j \langle \varphi^j, e_i \rangle$, d'où $\langle \varphi^j, e_i \rangle = \delta^j_i$: c'est-à-dire que les m formes φ^j sont linéairement indépendantes et constituent la base de T^*_x duale de la base $\{e_i\}$, base à laquelle on peut donc identifier φ, qui est pour cette raison appelé co-repère *dual du repère z*. Inversement une base $\{\varphi^j\}$ de T^*_x détermine un co-repère par (1), et le repère inverse $z = \varphi^{-1}$ est le *repère dual de* φ.

Soient T^C_x le complexifié de T_x et $T^C = \bigcup_{x \in X} T^C_x$, E^C_x l'ensemble des bases (sur C) de T^C_x et $E^C = \bigcup_{x \in X} E^C_x$. Toute base de T_x est une base sur C de T_x^C, de sorte que $E_x^C \supset E_x$ et $E^C \supset E$. Le groupe CL_m opérant à droite sur chaque E_x^C par

$$z = \{e_A\} \in E_X^C, \qquad l = (l_B^A) \in CL_m \to \{e_A l_B^A\} = z.l \in E_x^C,$$

on voit immédiatement (remarque I, 5) que E^C est muni naturellement d'une structure d'e.f.p. $E^C(X, CL_m)$ pour laquelle E est un L_m-s.e.f.p. de E^C.

Soit α la projection canonique de $C^m \times E^C$ sur le modelé $C^m(E^C)$ (cf. définition I, 2), CL_m opérant naturellement sur C^m : de l'inclusion $R^m \times E \subset C^m \times E^C$, E étant un s.e.f.p. de E^C et C^m le complexifié de R^m, découlent d'une part que $\alpha(R^m \times E) = T$ et d'autre part que la fibre en x de $C^m(E^C)$ est le complexifié de la fibre T_x de T — c'est-à-dire que $C^m(E^C) = T^C$ qui a donc une structure fibrée $T^C(X, CL_m, C^m)$. Comme CL_m est effectif sur C^m, l'e.f.p. associé $\widehat{T^C}$ n'est autre que E^C et tout $z \in E^C$ s'identifie à un isomorphisme de C^m sur T_x^C. C'est pourquoi $E^C = E^C(X)$ sera appelé *l'espace des repères complexes de* X.

L'isomorphisme inverse, $\varphi = z^{-1}$, $T_X^C \to C^m$, sera encore appelé le *co-repère complexe en x dual de z*. C'est un 1-forme sur T_x^C à valeurs dans l'espace vectoriel complexe C^m : il s'identifie donc (cf. II, 5) à une application linéaire de T_x dans C^m qui peut encore s'écrire, $\{f_j\}$ étant la base canonique de C^m,

$$(1) \qquad \varphi = f_j \otimes \varphi^j$$

où les φ^j sont, cette fois, des formes sur T_x à valeurs complexes. Le même calcul que dans le cas réel montre que ces formes sont linéairement indépendantes sur les complexes. Inversement, m formes linéaires à valeurs complexes en x, linéairement indépendantes sur C, déterminent un co-repère φ par (1), dont le repère inverse est *le repère dual de* φ.

Si h est une section locale différentiable de E (resp. E^C) au-dessus d'un ouvert U et $\theta_x = h(x)^{-1}$ le co-repère dual de $h(x)$, la 1-forme sur U à valeurs dans R^m (resp. C^m) dont la restriction au point x est θ_x sera appelée par abus de langage *co-repère sur* U *dual de h*. Ses composantes θ^j ($j = 1, 2, \ldots, m$) sont m formes de Pfaff réelles (resp. à valeurs complexes) linéairement indépendantes sur R (resp. C) dans tout U, et réciproquement m telles formes sont les composantes d'un co-repère sur U.

En particulier, si $h(x)$ est le repère naturel en x d'un système de coordonnées locales x^i ($i = 1, 2, \ldots, m$) sur U, le co-repère dual θ sur U a pour composantes dx^i, de sorte que $d\theta = 0$. Inversement un co-repère θ sur U tel que $d\theta = 0$ est localement un co-repère naturel de coordonnées locales. Ces remarques s'étendent aux repères et co-repères complexes en appelant système de coordonnées locales complexes sur X un système de m fonctions à valeurs complexes différentiables sur $U \subset X$ indépendantes sur les complexes.

DÉFINITION III, 1. — *Nous appellerons* espace de repères (*resp.* espace de repères complexes) *sur la variété différentiable* X, *tout sous-espace fibré principal différentiable de l'espace* E *des repères linéaires* (*resp.* E^C *des repères complexes*) *de* X. *On appelle* G-structure (*resp.* G-structure complexe) *sur* X *la structure* $S = S(G, H)$ *déterminée par la donnée d'un espace de repères* H (*resp. espace de repères complexes*) *sur* X, *de groupe structural* G.

G est donc un sous-groupe de Lie de L_m (resp. CL_m). S est dite de classe C^r si H est un s.e.f.p. de E (resp. E^C) de classe C^r. $z \in H_x$ ($x \in X$) peut être appelé *repère de* X *en* x *distingué pour la structure* S, ou plus brièvement repère distingué de S. Le co-repère dual d'un repère distingué est un *co-repère distingué.* Une G-structure ($H \subset E$) sera souvent appelée G-*structure réelle* par opposition à une G-structure complexe ($H \subset E^C$).

Il découle de la proposition (I, 5, 2) que H — et S — peut être déterminé par une famille $\{U_\alpha, h_\alpha\}$ où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de X et h_α une section locale de E (resp. E^C) au-dessus de U_α avec,

$$(2) \qquad h_\beta(x) = h_\alpha(x) \cdot g_{\alpha\beta}(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta$$

$g_{\alpha\beta}$ étant une fonction différentiable sur $U_\alpha \cap U_\beta$ à valeurs dans G. Alors, si θ_α est le co-repère sur U_α dual de h_α, on a dans $U_\alpha \cap U_\beta$,

$$(3) \qquad \theta_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot \theta_\beta$$

avec les notations du chapitre II. Inversement soit une famille $\{U_\alpha, \theta_\alpha\}$ où $\{U_\alpha\}$ est un recouvrement de X et θ_α un co-repère sur U_α, ces co-repères étant liés par (3) dans $U_\alpha \cap U_\beta$: elle détermine une G-structure sur X.

Cette dernière détermination est la détermination locale la plus courante : cf. S. S. Chern [9]. Un grand nombre de structures plus ou moins classiques de la géométrie différentielle peuvent être déterminées par la donnée d'une G-structure : on en trouvera ci-dessous quelques exemples. La monographie de P. Libermann [20] en comprend une liste abondante.

Premiers exemples. — *a*) L'e.f.p. des repères orthonormés d'une variété Riemannienne définit sur X une $O(m)$-structure et réciproquement.

b) *Les structures presque produit complexe* (*resp. réel*) — ou π-structures (resp. π_R-structures) — ont été envisagées par D. C. Spencer [25], étudiées en détail par G. Legrand [18] et, indépendamment, par l'auteur. Si dim $X = m = n_1 + n_2$, une π (resp. π_R) — structure sur X est définie par la donnée de deux champs de sous-espaces vectoriels complexes (resp. réels) T_i de T_x^C (resp. T_x) de dimension n_i ($i = 1,2$) et supplémentaires. Les bases de T_x^C (resp. T_x) dont les n_1 premiers vecteurs appartiennent à T_1, et les n_2 suivants à T_2 constituent un espace de repères complexes (resp. réels) de groupe structural CL (n_1, n_2) (resp. L (n_1, n_2)) (cf. Ch. I, § 6). Réciproquement une CL (n_1, n_2) — structure sur X détermine une π-structure ; une L (n_1, n_2) — structure réelle détermine une π_R-structure.

c) Une π-structure pour laquelle T_2 est le complexe conjugué de T_1 (d'ou $n_1 = n_2 = n$ et $m = 2n$) définit une structure presque complexe (cf. [22] § 101). Les bases adaptées de T_x^C, formées d'une base $\{\varepsilon_\alpha\}$ ($\alpha, \beta, = 1, 2, \ldots, n$) de T_1 et de la base complexe conjuguée $\{\varepsilon_{\alpha^*} = \mathfrak{T}.\varepsilon_\alpha\}$ ($\alpha^* = \alpha + n$) de T_2, constituent un espace de repères $E^b(X) \subset E^C$ ayant pour groupe structural le groupe CL_n^b des matrices

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & \bar{A} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A \in CL_n, \quad \bar{A} = \text{complexe conjuguée de } A,$$

groupe isomorphe à CL_n. Inversement, une CL_n^b-structure S détermine une structure presque complexe si et seulement si, pour tout $x \in X$, il existe un repère distingué $\{\varepsilon_i\}$ ($i = 1, 2, \ldots, 2n$) tel que $\varepsilon_{\alpha^*} = \mathfrak{T}.\varepsilon_\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n$: en particulier une structure presque complexe sur X est parfaitement déterminée par son espace $E^b(X)$.

Les *bases réelles adaptées* à la structure presque complexe sont les bases de T_x déduites des précédentes par

$$e_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_{\alpha^*}), \qquad e_{\alpha^*} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_{\alpha^*})$$

elles constituent un *espace de repères réels* $E^a(X) \subset E$ dont le groupe structural CL_n^a est la représentation réelle de CL_n dans L_{2n}, c'est-à-dire le groupe des matrices

$$\begin{pmatrix} B & C \\ -C & B \end{pmatrix} \quad \text{B, C matrices réelles,} \quad B + iC = A \in CL_n.$$

Inversement, une CL_n^a-structure réelle sur X détermine une structure presque complexe.

d) Soit $X = G/H$ un espace homogène du groupe de Lie G, p sa projection canonique et E l'e.f.p. des repères de X. K_g désignant l'opération de $g \in G$ sur X, cette opération se prolonge à E : si $z \in E_x$, $\underline{K_g} \circ z = gz \in E_{gx}$ ($\underline{K_g}$ application linéaire tangente à K_g). Soit z_0 fixé tel que $p_E . z_0 = pe = x_0$. Soient $\tilde{H}$ le groupe linéaire d'isotropie de X en x_0 et $\tilde{H}_{z_0} \subset L_m$ le groupe $z_0^{-1} . \tilde{H} . z_0$ isomorphe à $\tilde{H}$. L'application f de G dans E, $g \to g . z_0 = f(g)$, est un X-homomorphisme d'e.f.p. compatible avec l'homomorphisme

$$\rho : \qquad H \to L_m, \qquad h \in H \to z_0^{-1} \circ \underline{K_h} \circ z_0 \in \tilde{H}_{z_0} \subset L_m ;$$

en effet,

$$f(g.h) = (g.h)z_0 = \underline{K_{gh}} \circ z_0 = \underline{K_g} \circ \underline{K_h} \circ z_0$$

soit

$$f(g.h) = \underline{K_g} \circ z_0 \circ (z_0^{-1} \circ \underline{K_h} \circ z_0) = f(g) . \rho(h).$$

L'image $P_{z_0}(X) = f(G)$ est donc (proposition I, 5, 2) un $\rho(H)$-s.e.f.p. de E, c'est-à-dire un espace de repères de groupes $\tilde{H}_{z_0}$. En particulier si G/H est un espace homogène réductif, $\tilde{H}$ est isomorphe à H, ρ et f sont des isomorphismes et G est isomorphe à $P_{z_0}(X)$:

Proposition III, 1. — *Si* $X = G/H$ *est un espace homogène du groupe de Lie* G, *il est naturellement muni d'une* $\tilde{H}_{z_0}$*-structure où* $\tilde{H}_{z_0}$ *est la représentation du groupe linéaire d'isotropie* $\tilde{H}$ *dans un repère* z_0 *de* X *au point* $x_0 = pe$. *L'espace de repères correspondant est homomorphe à l'e.f.p.* $G \to G/H$: *il lui est isomorphe si* G/H *est réductif.*

2. — G-Structures définies par un tenseur.

Les trois premiers exemples ci-dessus entrent dans un même schéma. Soit $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de L_m dans un espace vectoriel M et un sous-groupe $G \subset L_m$ laissant invariant $u \in M$. Soit d'autre part, S(G, H) une G-structure sur X. L'application constante $H \to u$ est un tenseur sur H à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}(G)$ il s'étend donc (ch. II, § 3) en un tenseur t sur E à valeurs dans M et de type $\mathcal{R}(L_m)$: ce tenseur prend ses valeurs dans la classe d'intransitivité M_u de u pour $\mathcal{R}(L_m)$ puisque, si $z \in E$ il existe $z' \in H$ tel que $z = z'.l$ $(l \in L_m)$ et l'on a alors

$$t(z) = t(z'.l) = \mathcal{R}(l^{-1}).t(z') = \mathcal{R}(l^{-1}).u \in M_u.$$

Supposons réciproquement que G soit *le plus grand sous-groupe* de L_m *laissant u invariant* (G est alors fermé dans L_m) et soit sur E un tenseur t de type $\mathcal{R}(L_m)$ à valeurs dans M_u. Soit $H \subset E$ l'ensemble des repères z tels que $t(z) = u$:

1° $p(H) = X$ car, si $z_1 \in E_x$, $t(z_1) \in M_u$; donc il existe $l_1 \in L_m$ tel que $t(z_1) = \mathcal{R}(l_1).u$ et $t(z_1.l_1) = \mathcal{R}(l_1^{-1}).t(z_1) = u$ de sorte que $z_1.l_1 \in H$;

2° si z, $z' \in H_x$, $z' = z.l$ $(l \in L_m)$ et $t(z') = \mathcal{R}(l^{-1})\,t(z)$ c'est-à-dire $\mathcal{R}(l^{-1})\,u = u$ et $l \in G$. On a donc $H_x = z.G$.

D'après la proposition (I, 5, 2), pour que H soit un G-s.e.f.p. de E il faut et suffit que, de plus, E admette des sections locales à valeurs dans H. Analysons cette dernière condition. Soient π l'application canonique $L_m \to L_m/G$ et f l'injection $L_m/G \to M$ (application différentiable biunivoque sur M_u) $l.G \to \mathcal{R}(l)u \in M$; f est analytique et partout régulière de sorte que M_u est une sous-variété analytique de M : désignons cette sous-variété par $\tilde{M}_u$ et identifions-la à L_m/G par f de sorte que

$$\pi(l) = l.G = \mathcal{R}(l).u \tag{1}$$

t, application différentiable dans M prenant ses valeurs dans M_u n'est pas nécessairement une application différentiable dans $\tilde{M}_u$. Supposons que H soit un s.e.f.p. de E et soit V un ouvert de X muni d'une section z à valeurs dans H : pour

$x \in V$, $l \in L_m$, $t(z(x).l) = \mathcal{R}(l^{-1}).u$ c'est-à-dire que, dans la carte de E associée à la section z, l'application t, $E_V \to \tilde{M}_u$ s'exprime par

$$(x, l) \to \pi(l^{-1}).$$

application qui est donc différentiable. Pour que H soit un s.e.f.p. il faut donc que t soit une application différentiable non seulement dans M mais aussi dans $\tilde{M}_u$. Cette condition est suffisante. Soit en effet V un ouvert de X muni d'une section s de E; $t \circ s = g$ est une application différentiable de V dans $\tilde{M}_u$ et, si l'on restreint V de façon que $g(V)$ soit inclus dans un ouvert de $L_m/G = \tilde{M}_u$, muni d'une section locale σ de $L_m \to L_m/G$, $l = \sigma \circ g$ est une application différentiable de V dans L_m; $x \to z(x) = s(x).l(x)$ est une section locale différentiable de E sur V et

$$t(z(x)) = t(s(x).l(x)) = \mathcal{R}(l(x)^{-1}).t(s(x)) = \mathcal{R}(l(x)^{-1}).g(x)$$

et puisque $\pi \circ \sigma =$ identité de L_m/G, $g(x) = \pi(l(x)) = R(l(x))u$ d'après (1), d'ou $t(z(x)) = u$ et z prend ses valeurs dans H. Tenant compte du lemme (I, 6, 1) nous avons établi :

PROPOSITION III, 2. — *Soient $\mathcal{R}$ une représentation linéaire de L_m (resp. CL_m) dans un espace vectoriel* M, G *le sous-groupe de L_m (resp. CL_m) laissant invariant $u \in$* M, M_u *la classe d'intransitivité de u par L_m (resp. CL_m) munie de sa structure analytique d'espace homogène L_m/G. La donnée sur V_m d'une* G*-structure équivaut à celle d'un tenseur sur* $E(V_m)$ (resp. $E^C(V_m)$) *de type $\mathcal{R}(L_m)$ (resp. $\mathcal{R}(CL_m)$) à valeurs dans M_u pourvu que t soit une application différentiable dans* M_u (et non seulement dans M). *Cette dernière condition est toujours réalisée si M_u est une sous-variété propre de* M, *en particulier si L_m/G est compact.*

En dehors du cas compact, le problème de l'existence de sections locales distinguées se pose donc toujours. Reprenons les exemples du paragraphe précédent.

a) M est l'espace des formes bilinéaires sur R^m, u la forme bilinéaire $x, y \in R^m \to \sum_{i=1,\dots,m} x^i y^i$ dont la matrice dans la base canonique de R^m est la matrice identité : alors $G = O(m)$, M_u est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies positives, t le « tenseur métrique » définissant sur V_m la structure Riemannienne associée à la $O(m)$-structure. Le tenseur t différentiable à valeur dans M étant donné, l'existence de sections locales orthonormées se montre directement en construisant une telle section à partir d'une section locale quelconque de E par un procédé n'affectant pas la continuité, par exemple par le « procédé d'orthogonalisation de Schmidt ».

b) $M = \mathfrak{L}(C^m)$, $\mathcal{R}(l)$, $l \in CL_m$, est la transformation canonique $h \in M \rightarrow \mathcal{R}(l).h = l^{-1}.h.l$, CL (n_1, n_2) est le sous-groupe de CL_m laissant invariante la matrice

$$u = \begin{pmatrix} E_{n_1} & O \\ O & -E_{n_2} \end{pmatrix}$$

M_u est l'ensemble des automorphismes de C^m de carré identité dont l'espace des vecteurs propres correspondant à la valeur propre $+1$ est de dimension n_1; t est le tenseur sur $E^C(V_m)$ qui définit en chaque point $x \in V_m$ un automorphisme de T^C_x de carré identité. La donnée de t équivaut à celle de la π-structure [15].

c) une structure presque complexe déterminée par une CL^a_n-structure réelle peut être définie de façon analogue: $M = \mathfrak{L}(R^{2n})$; $\mathcal{R}(l)$ $(l \in L_m)$ est encore la transformation canonique; alors CL^a_n est le sous-groupe de L_{2n} qui laisse invariante la matrice

$$u = \begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix}$$

M_u est l'ensemble des automorphismes de R^{2n} de carré identité; t est le tenseur presque complexe.

3. — G-Structures équivalentes et subordonnées.

A) Définition III, 3, 1. — *Soit une structure* $S = S(G, H)$ (*réelle ou complexe*). *Une structure* $S' = S'(G', H')$ *est dite* équivalente à S *s'il existe* $l \in L_m$ (*resp.* CL_m) *tel que* $H' = H.l$. S *complexe est dite* équivalente au réel *si elle admet une structure équivalente réelle. Si* S *est réelle* (*resp. complexe*) *une structure* S' *équivalente* à S ($H' = H.l$) *est encore une* G-*structure réelle* (*resp. complexe*) *si et seulement si* l *appartient au normalisateur*

[15] Cf. G. Legrand [18].

N(G) (*resp.* $N^C(G)$) *de* G *dans* L_m (*resp.* CL_m) : *on dit alors que* S' *est une* G-structure réelle (resp. complexe) associée à S.

La structure S' d'espace de repères $H' = H.l$ à un groupe structural conjugué de G dans Cl_m, $G' = l^{-1}.G.l$; car, si $z \in H_x$ $H_x = z.G$, $H'_x = z.G.l = z.l.(l^{-1}.G.l)$ $(x \in X)$. Pour que $G' = G$, il faut et suffit donc que $l \in N(G)$ (resp. $N^C(G)$).

Nous verrons dans les exemples ci-dessous et chapitre IV que les structures équivalentes doivent être considérées comme définissant une même structure infinitésimale sur X. Une classe $\mathcal{C}$ de sous-groupes conjugués de L_m étant donnée, on peut appeler $\mathcal{C}$-structure l'ensemble des G'-structures équivalentes à une G-structure donnée (G, $G' \in \mathcal{C}$). Chacune des G'-structures envisagées étant alors « un représentant » de la $\mathcal{C}$-structure. Le problème de la détermination de toutes les G-structures possibles sur X est résolu par la proposition (I, 5, 3) lorsque G donné est fermé dans L_m : elles correspondent biunivoquement aux sections différentiables de l'espace E/G. Le problème de la détermination de toutes les $\mathcal{C}$-structures peut être posé ainsi : un représentant $G \in \mathcal{C}$ étant choisi, une $\mathcal{C}$-structure donnée admet dès que $N(G) \neq G$ plusieurs représentants qui sont des G-structures, et ces structures sont associées; le groupe $N = N(G)/G$ opère sur E/G ainsi que sur le faisceau F des germes de sections différentiables de E/G que l'on peut appeler *faisceau des germes de* G-*structures*. N étant muni de la topologie discrète, l'espace quotient $\mathcal{F}/N$ est encore un faisceau et, si q est l'application canonique $\mathcal{F} \to \mathcal{F}/N$, pour que deux sections de $\mathcal{F}$ définissent deux G-structures associées, il faut et suffit qu'elles aient même image par q. On peut donc appeler $\mathcal{F}/N$ *faisceau des* $\mathcal{C}$-*structures sur* X : il y a correspondance biunivoque entre les $\mathcal{C}$-structures sur X et les sections de ce faisceau qui ont un relèvement dans $\mathcal{F}$. La même analyse est évidemment valable dans le cas complexe.

Exemples. — Reprenons avec les mêmes notations certains exemples du § 1.

a) Les différentes $\tilde{H}_{z_0}$-structures définies sur un espace homogène G/H (exemple *d*) sont équivalentes : z_0 étant remplacé par $z_1 = z_0.l$ $(l \in L_m)$ et f par f_1, on a

$$f_1(g) = K_g \circ z_1 = K_g \circ z_0 \circ l = f(g).l,$$

d'où
$$\overline{P_{z_1}}(X) = \overline{P_{z_0}}(X).l.$$

b) La CL_n^b-structure S^b et la CL_n^a-structure S^a définies par une structure presque complexe (exemple *c*) sont équivalentes, car si $z = \{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_{\alpha^*}\} \in E^b(X)$ est une base adaptée complexe et $z' = \{e_\alpha, e_{\alpha^*}\} \in E^a(X)$ la base réelle correspondante, on a

$$z' = z.l \qquad \text{où} \qquad l = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} E_n & E_n \\ iE_n & -iE_n \end{pmatrix}$$

d'où $E^a(X) = E^b(X).l$ et $CL_n^a(X) = l^{-1}.CL_n^b(X).l$, ce que l'on vérifie immédiatement. S^a étant réelle, S^b est équivalente au réel.

c) l'existence de G-structures non équivalentes au réel est évidente : il suffit que $\dim G > m^2$ pour qu'une G-structure ne puisse être équivalente au réel. Ainsi *une* π*-structure* (exemple *b*) *n'est jamais équivalente au réel.*

B) Définition III, 3, 2. — *Soient deux structures* S(G, H) *et* S′(G′, H′) : *on dit que* S *est* subordonnée à S′, *ou que* S′ *est une* extension de S, *si* $H \subset H'$ (d'où $G \subset G'$).

G′ étant donné, le problème d'existence d'une G-structure subordonnée à S′ est résolu par la proposition (I, 5, 3). Étant donnée une autre structure S″ (G″, H″) il se pose le problème de l'existence d'une structure S subordonnée à la fois à S′ et S″ : si $H' \cap H''$ est encore un espace de repères, il définit une telle structure de groupe $\Gamma = G' \cap G''$ (la plus grande); inversement si $H \subset H' \cap H''$, définit une structure subordonnée commune, $H' \cap H'' = H.\Gamma$ en détermine aussi une. Notre problème est donc ramené à celui-ci : $H' \cap H''$ est-il un espace de repères? C'est pour le résoudre que nous avons fait l'étude du paragraphe (I, 6). La proposition (I, 6, 2) et le théorème (I, 6) permettent d'énoncer :

Theoreme III, 3. — *Pour qu'il existe une structure subordonnée commune à une* G′*-structure* S′ *et à une* G″*-structure* S″ *sur* X, *il faut qu'elles admettent en chaque point* $x \in X$ *un repère distingué commun: cette condition est suffisante si le couple* G′, G″ *est un couple générique de sous-groupes de* L_m (*resp.* CL_m), *par exemple si* G'/Γ (*resp.* G''/Γ) *est compact* ($\Gamma = G' \cap G''$). *En particulier, pour qu'une* G*-structure complexe* S *soit l'extension d'une structure réelle, il faut que* S *admette en chaque point un repère distingué réel: cette condition est* *suffisante si le couple* G, L_m *est un couple générique de sous-groupes de* CL_m, *en particulier* si G/Γ (*resp.* L_m/Γ *est compact.*)

La condition d'existence d'un repère distingué en x commun à S′ et S″, $H'_x \cap H''_x \neq \emptyset$, peut se mettre sous la forme $H'_x \subset H''_x . G'$; elle est réalisée pour tout $x \in X$ si

$$(1) \qquad H' \subset H''.G'.$$

En particulier, pour que la G-structure complexe S admette un repère distingué réel en tout point, il faut et suffit, que

$$(2) \qquad H \subset E.G.$$

Si $z_x \in E_x$, la fibre en x de E.G est $z_x.L_m.G$ et dès que $L_m.G \neq CL_m$ (par exemple $\dim G < m^2$) on peut affirmer qu'*une* G-*structure complexe n'est pas en général l'extension d'une structure réelle.* Au contraire la condition (2) sera toujours réalisée si et seulement si

$$L_m.G = CL_m.$$

Comme cette condition entraîne que le couple L_m, G est un couple générique de sous-groupes (théorème I, 6, 2) exemple *b*), une telle G-structure est toujours l'extension d'une structure réelle.

Exemples. — *a*) $O(m)$ étant compact, si une structure S(G, H) quelconque sur X admet en tout point un repère distingué orthonormé, S admet d'après le théorème précédent une structure subordonnée de groupe $G \cap O(m)$: dans les cas les plus courants, ce fait peut résulter directement de la façon dont est déterminé un repère distingué orthonormé — mais la preuve en est omise par la plupart des auteurs — ceci découle ici d'un théorème général.

b) une structure presque hermitienne subordonnée à une structure presque complexe sur X de dimension $2n$ peut être déterminée par un espace de repères $\varepsilon^b(X) \subset E^b(X)$ ayant pour groupe structural le groupe $U^b(n) \subset CL^b_n$ isomorphe à $U(n)$ des matrices

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & \bar{A} \end{pmatrix} \qquad A \in U(n),$$

$U^b(n) = CL^b_n \cap U(2n)$. Elle peut être aussi bien déterminée par l'espace de repères réels $\varepsilon^a(X) = \varepsilon^b(X).l$ (l matrice définie à l'exemple *b*) de l'alinéa A) de groupe $U^a(n) = O(2n) \cap CL_n^a$. C'est donc la plus grande structure subordonnée commune à la structure Riemannienne définie par les repères orthonormés $\varepsilon^a(X).O(2n)$ et à la structure presque complexe définie par les repères réels adaptés $\varepsilon^a(X).CL_n^a = E^a(X)$. Inversement, quand on se donne sur X une métrique riemannienne Φ et un opérateur presque complexe $\mathfrak{J}$ tels que, en tout point x, l'opérateur $\mathfrak{J}_x$ soit hermitien par rapport à la métrique Φ_x ($\Phi_x(\mathfrak{J}_x v, \mathfrak{J}_x w) = \Phi_x(v, w)$ pour tout v, $w \in T_x$), le fait que l'espace $\varepsilon^a(X)$ des repères réels adaptés en chaque point à ces deux structures est bien un « espace de repères » suppose la démonstration (généralement omise) de l'existence de sections locales de E(X) qui soient à la fois orthonormées et adaptées à la structure presque complexe : notre théorème, applicable puisque l'un des groupes est compact, ramène cette démonstration à celle de l'existence de sections locales orthonormées pour la métrique Φ d'une part, de sections locales adaptées à la structure presque complexe d'autre part.

c) Pour qu'une π-structure S soit l'extension d'une π_R-structure, il faut et suffit que S admette en chaque point un repère distingué réel : c'est ici évident car, le champ de plans $T_i (i = 1,2)$ étant différentiable ainsi que le champ T_x, le champ de plans $T_i \cap T_x$ est aussi différentiable; cela peut aussi résulter du théorème III, 3 le couple CL (n_1, n_2), L_m de sous-groupes de CL_m étant générique (proposition I, 6, 4).

C) Définition III, 3, 3. — *Une* G'*-structure* S' *est dite* subordonnée au sens large *à une structure* S *si elle est subordonnée à une structure équivalente à* S (*ou équivalente à une structure subordonnée à* S). S *est alors une* extension au sens large *de* S'.

Etudions en particulier à quelles conditions une structure complexe S(G, H) est l'extension au sens large d'une structure réelle : il faut et suffit pour cela qu'il existe $l \in CL_m$ tel que $S'(lG.l^{-1}, H.l^{-1})$ admette une structure subordonnée réelle; il faut donc d'après (1) qu'il existe l tel que $H.l^{-1} \subset E.(lGl^{-1})$ soit

$$H \subset E.l.G. \tag{3}$$

Cette condition est suffisante si le couple L_m, $l.G.l^{-1}$ est un couple générique de sous-groupes de CL_m.

Les ensembles $E.l.G$, $l \in CL_m$, (doubles classes modulo $E : G$) définissent des classes d'équivalence sur E^C qui correspondent biunivoquement aux doubles classes de CL_m modulo $L_m : G$. S'il existe plus d'une telle classe (c'est-à-dire si $L_m . G \neq CL_m$) *il existe sûrement des* G-*structures complexes n'admettant pas de structure réelle subordonnée au sens large.* En ce sens, les G-structures complexes constituent une vraie généralisation des G-structure réelles.

4. — Caractérisation d'un espace de repères par la 1-forme fondamentale.

DÉFINITION III, 4, 1. — *Soit* H(X, G) *un espace de repères réels* (*resp. complexes*) *sur la variété* X *de dimension m. On appelle* 1-forme fondamentale sur H *la* 1-*forme* ω *à valeurs dans* R^m (*resp.* C^m) *qui, au vecteur* (*resp. vecteur complexe*) $\mathfrak{v}_z$ *tangent à* H *au point z, fait correspondre le vecteur*

(1) $$\omega(\mathfrak{v}_z) = z^{-1} . p\mathfrak{v}_z \in R^m \text{ (resp. } C^m).$$

La 1-forme fondamentale sur E (resp. E^C) sera notée θ (resp. θ^C). La restriction de la forme induite par θ^C sur E aux vecteurs tangents réels coïncide avec θ. Si $H \subset E$ (resp. E^C) la 1-forme fondamentale ω de H est la forme induite par θ (resp. θ^C) sur H. Quand aucune ambiguïté n'est possible, θ^C est encore notée θ.

La 1-forme ω définie dans la définition (III, 4, 1) satisfait aux deux propriétés

(2) $$D_g^* \omega = g^{-1} . \omega \quad g \in G$$

(3) $$\omega(\mathfrak{v}) = 0 \longleftrightarrow p\mathfrak{v} = 0$$

($\mathfrak{v}$ vecteur, réel ou complexe, tangent à H). En effet, si $\mathfrak{v}_z$ est tangent à H au point z, $D_g \mathfrak{v}_z$ est tangent au point $z.g$ et

$$\omega(D_g \mathfrak{v}_z) = (z.g)^{-1} p(D_g \mathfrak{v}_z) = g^{-1} z^{-1} p\mathfrak{v}_z = g^{-1} \omega(\mathfrak{v}_z)$$

d'où (2). D'autre part, $\omega(\mathfrak{v}_z) = 0 \longleftrightarrow z^{-1} \; (p\mathfrak{v}_z) = 0$ ce qui équivaut à $p\mathfrak{v}_z = 0$ puisque z est un isomorphisme de R^m (resp. C^m) sur T_{pz} (resp. T^C_{pz}); ω est donc une 1-forme tensorielle : nous traduirons la dernière propriété en disant qu'elle est *régulière* — et son type en disant que c'est une 1-*forme vectorielle.*

Soit s une section de H au-dessus de l'ouvert $U \subset X$; $s^*\omega$ est une 1-forme sur U à valeurs dans R^m (resp. C^m); si $\mathfrak{V}_x \in T_x$ (resp. T_x^C), $s^*\omega(\mathfrak{V}_x) = \omega(s\mathfrak{V}_x)$ et comme $s\mathfrak{V}_x$ est tangent à H au point $s(x)$, $s^*\omega(\mathfrak{V}_x) = (s^{-1}(x).p)\ (s\mathfrak{V}_x) = s^{-1}(x)\ (\mathfrak{V}_x)$, c'est-à-dire que $(s^*\omega)_x = s^{-1}\ (x)$ et que $s^*\omega$ est le co-repère dual de la section s. Cette remarque peut servir de définition à ω (cf. ch. II, 3).

La forme fondamentale caractérise les espaces de repères :

Proposition III, 4, 1. — *Soit* G *un sous-groupe de Lie de* L_m (*resp.* CL_m) *pour qu'un e.f.p.* H(X, G) *soit* G-*isomorphe à un espace de repères sur* X, *il faut et suffit qu'il puisse être muni d'une* 1-*forme tensorielle* ω *à valeurs dans* R^m (*resp.* C^m) *satisfaisant à* (2) *et* (3). *Il existe alors un homomorphisme unique* f *de* H *dans* E(X) (*resp.* $E^C(X)$) *compatible avec l'application identique de* G *dans* L_m (*resp.* CL_m) *et tel que*

$$f^*\theta = \omega \tag{4}$$

où θ *est la* 1-*forme fondamentale sur* E (*resp.* E^C).

Soit d'abord f un G-isomorphisme de H(X, G) sur un espace de repères $H'(X, G) \subset E$: c'est un homomorphisme dans E et l'on sait (Ch. II, 3) que $\omega = f^*\theta$ est une 1-forme tensorielle sur H de même type; ω est régulière puisque

$$\omega(\mathfrak{V}_z) = o \longleftrightarrow \theta(f\mathfrak{V}_z) = o \longleftrightarrow p_E f\mathfrak{V}_z = o \longleftrightarrow p_H\mathfrak{V}_z = o\ (p_H = p_E \circ f).$$

Réciproquement, H(X, G) satisfaisant aux hypothèses de la proposition (III, 4, 1), supposons qu'il existe un G-isomorphisme f de H *dans* E tel que $f^*\theta = \omega$. Si $\mathfrak{V}_h \in T_h$ $(h \in H)$, $\omega(\mathfrak{V}_h) = \theta(f\mathfrak{V}_h)$ et comme $f\mathfrak{V}_h \in T_{f(h)}$, $\omega(\mathfrak{V}_h) = [f(h)]^{-1}p_E f\mathfrak{V}_h$, c'est-à-dire

$$\omega(\mathfrak{V}_h) = [f(h)]^{-1}p_H\mathfrak{V}_h. \tag{5}$$

Soit t_ω le tenseur associé à ω (déf. II, 3) tenseur sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $R^{m*} \otimes R^m$ de type $\rho(G \times L_m)$ tel que $\rho(g, l) = g \otimes l^{-1}$, c'est-à-dire tel que $t_\omega(h.g,\ z.l) = g^{-1}.t_\omega\ (h,\ z).l$. Il peut être défini par les formules ((6) Ch. II, 3) :

$$(6) \quad \begin{cases} t(h,\ z).u = \omega(\mathfrak{V}_h) \\ \text{si } \mathfrak{V}_h \in T_h,\ (h,\ z) \in H \otimes E,\ u \in R^m,\ z.u = p_H\mathfrak{V}_h \end{cases}$$

par suite de (3), $t_\omega(h,\ z).u = o \longleftrightarrow u = o$ et $t_\omega(h,\ z) \in L_m$. (6)

entraîne $t\omega(h, z).z^{-1}p_{\mathrm{H}}\mathfrak{T}_h = \omega(\mathfrak{T}_h)$ de sorte que (5) équivaut à

$$t_\omega(h, z).z^{-1}p_{\mathrm{H}}\mathfrak{T}_h = [f(h)]^{-1}.p_{\mathrm{H}}\mathfrak{T}_h \tag{7}$$

et comme $p_{\mathrm{H}}\mathrm{T}_h = \mathrm{T}_{ph}$, (7) équivaut à l'égalité entre opérateurs

$$f(h) = z.[t_\omega(h, z)]^{-1} \tag{8}$$

qui a un sens puisque $t_\omega(h, z) \in \mathrm{L}_m$. Nous avons jusqu'ici établi que, pour qu'une application f de H dans E satisfasse à (4), il faut et suffit qu'elle satisfasse à (8). Or, le second membre de (8) ne dépend pas de z, mais de h seul car si $(h, z') \in \mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$, $p_{\mathrm{E}}z' = p_{\mathrm{H}}h = p_{\mathrm{E}}z$ et $z' = z.l$ $(l \in \mathrm{L}_m)$ d'où

$$z'.[t_\omega(h, z')]^{-1} = z.{}'.[t_\omega(h, z.l)]^{-1} = (z.l)[t_\omega(h, z).l]^{-1} = z.[t_\omega(h, z)]^{-1}$$

(8) définit donc une application unique f de H dans E; elle est différentiable puisque, au-dessus d'un ouvert $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ muni d'une section différentiable, s de E, (8) peut s'écrire

$$f(h) = s(ph).[t_\omega(h, s(ph))]^{-1}$$

et que t_ω lui-même est une fonction différentiable sur $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$. Enfin f est un homomorphisme car

$$f(h.g) = z[t_\omega(h.g, z)]^{-1} = z[g^{-1}.t_\omega(h, z)]^{-1} = z.[t_\omega(h, z)]^{-1}.g = f(h).g.$$

La démonstration s'achève alors immédiatement en appliquant la proposition (I, 5, 3); elle s'étend sans modification aux espaces de repères complexes pourvu que l'on utilise le tenseur complexe $t^c\omega$ associé à ω qui est à valeurs dans CL_m.

Nous avons établi (Ch. II, § 3 et § 5) une correspondance biunivoque entre formes tensorielles sur un e.f.p. et tenseurs associés; nous avons vu que la propriété (3) pour ω équivaut pour t_ω à prendre ses valeurs dans L_m. Comme les tenseurs d'un certain type sur un e.f.p. correspondent biunivoquement aux sections d'un certain e.f. associé, la proposition (III, 4, 1) a le :

Corollaire. — *Soit un e.f.p.* H(X, G), *où* G *est un sous-groupe de Lie de* L_m (*resp.* CL_m) ($m = \dim$ X). *Les structures d'espace de repères sur* H *correspondent biunivoquement aux sections du fibré de fibre* L_m (*resp.* CL_m) *associé à* $\mathrm{H} \boxtimes \mathrm{E}$

(*resp.* $H \boxtimes E^C$), $G \times L_m$ (*resp.* $G \times CL_m$) *opérant sur la fibre par*

$$(g, l), t \to g^{-1}.t.l \qquad g \in G;\ l, t \in L_m \ (\textit{resp. } CL_m).$$

Pour une forme tensorielle Λ sur un espace de repères $H(X, G)$ on peut avoir une notion plus simple de tenseur associé que sur un e.f.p. quelconque. Supposons d'abord H espace de repères réels et Λ à valeurs dans un espace vectoriel réel M : $t\Lambda$ est un tenseur sur $H \boxtimes E$. Soient les applications

$i : H \to E$ inclusion

$j : H \to H \boxtimes E$, $h \in H \to (h, h) \in H \boxtimes E$, application qui identifie H à la diagonale du s.e.f.p. $H \boxtimes H \subset H \boxtimes E$;

$f : H \boxtimes E \to H$, $(h, z) \to h$, $h \in H$, $z \in E$, $p_H h = p_E z$;
$g : H \boxtimes E \to E$, $(h, z) \to z$, $h \in H$, $z \in E$, $p_H h = p_E z$.

On a donc

$$(9) \qquad f \circ j = \text{identité de H} \quad \text{et} \quad g \circ j = i.$$

$t'\Lambda = j^* t\Lambda$ est un tenseur sur H puisque j est un homomorphisme d'e.f.p. De (9) découle $\Lambda = j^* f^* \Lambda$ et la formule ((8) ch. II, § 3) devient

$$\Lambda = j^*\left[(t\Lambda).\overset{q}{\wedge} g^*\theta\right] = (j^* t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} j^*\left(g^*\theta\right)\right)$$

ou

$$\Lambda = (t'\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} j^* g^* \theta\right)$$

soit d'après (9)

$$\Lambda = (t'\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} i^* \theta\right)$$

ou, comme $i^*\theta$ n'est autre que la forme fondamentale ω de H

$$(10) \qquad \Lambda = (t'\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge} \omega\right).$$

Réciproquement, l'application de la proposition (II, 3, 1) montre que si λ est un tenseur sur H à valeurs dans $M \otimes \overset{q}{\wedge} R^{m*}$ et de type $\rho_1(G)$, $\left(\rho_1(g) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1}\right)$, $\Lambda = \lambda.\left(\overset{q}{\wedge} \omega\right)$ est une q-forme tensorielle telle que $\lambda = t'\Lambda$.

De même, si H est un espace de repères complexes et Λ à valeurs dans l'*espace vectoriel complexe* M, $t^C\Lambda$ est un tenseur sur $H \boxtimes E^C$; l'inclusion $H \subset E^C$ permet de définir des applications I, J, ... analogues à i, j, ... et $t'^C\Lambda = J^* t^C \Lambda$ est un tenseur sur H lié à Λ par une formule analogue à (10), la correspondance entre Λ et $t'^{C}\Lambda$ étant encore biunivoque.

Si H est un *espace de repères réels* et M un *espace vectoriel complexe* il se trouve définis deux tenseurs associés sur H suivant que l'on utilise l'inclusion $H \subset E$ (ce qui définit $t'\Lambda$ à valeurs dans $M \otimes_{R} \overset{q}{\wedge} R^{m*}$) ou $H \subset E^{C}$ (ce qui définit $t'^{C}\Lambda$ à valeurs dans $M \otimes_{C} \overset{q}{\wedge} C^{m*}$) : la remarque faite au ch. II, § 5 montre que ces deux tenseurs coïncident modulo l'identification canonique de $M \otimes_{C} \overset{q}{\wedge} C^{m*}$ et $M \otimes_{R} \overset{q}{\wedge} R^{m*}$.

Au contraire, si H est un *espace de repères complexes* et M un *espace vectoriel réel* (n'admettant pas de structure complexe pour laquelle les $\mathcal{R}(g)$ soient des transformations linéaires *sur* C) *on ne peut définir sur* H *lui-même un tenseur associé qui corresponde biunivoquement à* Λ par une formule analogue à (10). Supposons en effet un tel tenseur λ défini, tel que

$$\Lambda = \lambda . \left(\overset{q}{\wedge} \omega \right) \tag{11}$$

alors, nécessairement pour $h \in H$, $\lambda(h) \in M \otimes_{R} \overset{q}{\wedge} C^{m*}$. Or Λ n'est défini que sur l'espace Θ_h tangent à H en h et non sur son complexifié Θ_h^{C} : $\lambda(h)$ n'est donc astreint par (II) qu'à la condition

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathfrak{T}_h) &= \lambda(h) . \left\langle \overset{q}{\wedge} \omega,\ \mathfrak{T}_h \right\rangle, \qquad \mathfrak{T}_h \in \overset{q}{\wedge} \Theta_h \\ &= \lambda(h) . h^{-1} . p\mathfrak{T}_h \end{aligned}$$

(avec les notations simplifiées du ch. II). Quand $\mathfrak{T}_h$ décrit $\overset{q}{\wedge} \Theta_h$, $p\mathfrak{T}_h$ décrit $\overset{q}{\wedge} T_x (x = ph)$ et $h^{-1}p\mathfrak{T}_h$ décrit $\overset{q}{\wedge} h^{-1}T_x$ où $h^{-1}T_x$ est un sous-espace vectoriel (réel) de C^m de dimension réelle m : $\lambda(h)$ n'est donc pas complètement déterminée par (11).

Pour définir Λ par un tenseur sur H on peut cependant procéder ainsi : soit M′ un espace vectoriel complexe tel que $M' \supset M$ et $M' = M + iM$, et que de plus $\mathcal{R}(g)$ s'étende en un automorphisme complexe de M′. On peut prendre par exemple pour M′ le complexifié de M : ce n'est pas nécessairement le plus commode. Λ est donc une forme tensorielle complexe à valeurs dans M′ et de type $\mathcal{R}(G)$ qui, pour les *vecteurs tangents réels* prend ses valeurs dans $M \subset M'$. A Λ sont maintenant associés les tenseurs $t'^{C}\Lambda$ (resp. $t^{C}\Lambda$) sur H (resp. $H \boxtimes E^{C}$) à valeurs dans $M' \otimes_C \overset{q}{\wedge} C^{m*}$ — ainsi que $t\Lambda$ sur $H \boxtimes E$ à valeurs dans $M' \otimes_R \overset{q}{\wedge} R^{m*}$. Comme les tenseurs $t'^C\Lambda$ correspondent biunivoquement aux q-formes Λ sur H à valeurs dans M', cherchons à caractériser ceux pour lesquels Λ est à valeurs dans M. Or $t'^C\Lambda$ est déterminé biunivoquement par $t^C\Lambda$ dont la restriction à $H \boxtimes E$ est $t\Lambda$ (ch. II, 5) : de sorte que $t'^C\Lambda$ est déterminé par $t\Lambda$. Pour que Λ soit à valeurs dans M il faut et suffit que $t\Lambda$ soit à valeurs dans $V = M \otimes_R \overset{q}{\wedge} R^{m*} \subset M' \otimes_R \overset{q}{\wedge} R^{m*}$; $t^C\Lambda$ et $t'^C\Lambda$ prennent donc leurs valeurs dans l'orbite de V par CL_m, orbite qui n'est pas en général un sous-espace vectoriel (réel) de $M' \otimes_C \overset{q}{\wedge} C^{m+}$ de sorte que la condition sur $t'^C\Lambda$ se traduira en général par une *condition non linéaire.*

C'est pourquoi dans la suite on ne parlera de tenseur associé sur H, à une forme Λ sur H à valeurs dans M que si H *est un espace de repères réels et* M *quelconque* ou H *un espace de repères complexes et* M *complexe.* Il n'y a alors aucune ambiguïté et ce tenseur sera toujours noté $t\Lambda$. Énonçons

PROPOSITION III, 4, 2. — *Soit* H(X, G) *un espace de repères réels* (*resp. complexes*) *de forme fondamentale* ω *et* M *un espace vectoriel* (*resp. espace vectoriel complexe*). *Les q-formes* Λ *sur* H *à valeurs dans* M *correspondent biunivoquement aux tenseurs sur* H *à valeurs dans* $M \otimes_R \overset{q}{\wedge} R^{m*}$ $\left(\text{resp. } M \otimes_C \overset{q}{\wedge} C^{m*}\right)$ *et de type* $\rho_1(G)$ *où* $\rho_1(g) = \mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1}$. *Le tenseur correspondant à* Λ *est le tenseur associé sur* H, $t\Lambda$, *défini par*

$$\Lambda = (t\Lambda).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right). \tag{12}$$

Dans la base $\{e_A\}$ de M et la base canonique de R^m (resp. C^m), (12) s'écrit

$$\Lambda^A = \frac{1}{q!}(t\Lambda)^A_{i_1 \dots i_q}\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q} \tag{13}$$

où les ω^i composantes de ω sont des formes globales sur H linéairement indépendantes, et les composantes $(t\Lambda)^A_{i_1 \dots i_q}$ du tenseur associé des fonctions à valeurs réelles (resp. complexes) supposées antisymétriques par rapport aux indices i.

Si $H = E$ (resp. E^C) on retrouve la notion habituelle de tenseur canoniquement associé en prenant l'image réciproque de (13) par des sections locales. En particulier, si l'on applique (12) à ω elle-même, il vient $\omega = (t\omega).\omega$, ce qui montre que $t\omega$ est le tenseur constant sur H = à l'identité de L_m (resp. CL_m).

5. — Connexions sur les espaces de repères.

A) Nous appelons *connexion linéaire* sur X (resp. *linéaire complexe*) une connexion sur E(X) (resp. $E^C(X)$). S(G, H) étant une G-structure donnée nous appelons H-connexion, ou S-connexion indifféremment, une connexion sur H. Le groupe $G \subset L_m$ étant seul donné, nous appelons G-connexion une H-connexion arbitraire.

Soit γ une H-connexion et $\hat{\gamma}$ son extension à E (resp. E^C); π et $\hat{\pi}$ leurs formes respectives; un chemin dans H horizontal pour γ est aussi horizontal pour $\hat{\gamma}$, puisque π est la forme induite sur H par $\hat{\pi}$; de l'unicité du chemin horizontal pour une connexion au-dessus d'un chemin donné de X et ayant une origine z donnée, découle alors que la nappe d'holonomie d'origine $z \in H$ est la même pour les deux connexions, et par conséquent aussi les groupes d'holonomie pour les deux connexions : en particulier $\hat{\psi}_z \subset G$. Réciproquement si Γ est une connexion linéaire et si, en un point $z \in E$ (resp. E^C) le groupe d'holonomie $\psi_z \subset G$, la nappe d'holonomie H'_z étant un ψ_z-s.e.f.p. différentiable (ch. II, 4) $H = H'_z.G$ définit une G-structure S. D'autre part le champ d'holonomie de Γ en tout point $z' \in H'_z$ étant tangent à H'_z donc à H, on voit immédiatement que le champ d'holonomie de Γ est tangent à H en tout point de H : Γ est l'extension d'une H-connexion. Nous avons établi :

THÉORÈME III, 5, 1 ([16]). — *Pour qu'il existe sur* X *une* G-*structure* S *il faut et suffit qu'il existe une connexion linéaire* Γ *sur* X *dont le groupe d'holonomie en un repère* $z \in E(X)$ (*resp.* $E^C(X)$) *soit un sous-groupe de* G : Γ *est alors l'extension d'une* S-*connexion.*

Soit maintenant un groupe G tel que les G-structures puis-

([16]) Ce résultat contient ceux de [22] § 118 et de [18] ch. III, § 5.

sent être définies par un tenseur t à valeurs dans M au sens de la proposition (III, 2) dont nous reprenons les notations. G étant le sous-groupe des $g \in L_m$ tels que $\mathcal{R}(g).u = u$, $\underline{G}$ est la sous-algèbre des $\lambda \in \underline{L_m}$ tels que $\tilde{\mathcal{R}}(\lambda).u = 0$.

Soient S(G, H) une G-structure, γ une S-connexion et $\hat{\gamma}$ la connexion linéaire extension de γ, π et $\hat{\pi}$ leurs formes respectives, ∇ et $\hat{\nabla}$ les différentiations absolues correspondantes et t le tenseur sur E définissant la structure. D'après ((2), ch. II, 4) on a

$$\hat{\nabla} t = dt + \tilde{\mathcal{R}}(\hat{\pi}).t$$

d'où, i étant l'injection H $\to$ E

$$\begin{aligned} i^*\hat{\nabla} t &= di^*t + \tilde{\mathcal{R}}(i^*\hat{\pi}).i^*t \\ &= di^*t + \tilde{\mathcal{R}}(\pi).i^*t = \nabla i^*t \end{aligned}$$

i^*t étant constant sur H et égal à u

$$(1) \qquad i^*\hat{\nabla} t = \tilde{\mathcal{R}}(\pi).u$$

c'est-à-dire, si $\pi = \varepsilon_\rho \otimes \pi^\rho$ ($\{\varepsilon_\rho\}$ base de $\underline{G}$)

$$i^*\hat{\nabla} t = \tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_\rho).u \otimes \pi^\rho = 0$$

ce qui entraîne $\hat{\nabla} t = 0$.

Réciproquement soit $\hat{\gamma}$ une connexion linéaire de forme $\hat{\pi}$ telle que $\hat{\nabla} t = 0$. $\pi = i^*\hat{\pi}$ est une 1-forme sur H de type adjoint à valeurs dans $\underline{L_m}$ dont la restriction aux fibres de H coïncide avec la forme β relative à H (ch. II, § 4, A) parce que les translations à droite de G sur H sont les restrictions des translations à droite de G opérant sur E (déf. I, 5, 2). Pour que π soit une forme de connexion sur H, il suffit donc que, de plus, elle prenne ses valeurs dans $\underline{G}$. Soit une base de $\underline{L_m}$ $\{\varepsilon_\rho, \varepsilon_a\}$ obtenue en complétant la base $\{\varepsilon_\rho\}$ de $\underline{G}$: $\pi = \varepsilon_\rho \otimes \pi^\rho + \varepsilon_a \otimes \pi^a$. Sur H, $i^*\hat{\nabla} t$ est encore donnée par (1) et est nulle par hypothèse;

or $\quad \tilde{\mathcal{R}}(\pi).u = \tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_\rho).u \otimes \pi^\rho + \tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_a).u \otimes \pi^a = \tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_a).u \otimes \pi^a$

puisque $\varepsilon_\rho \in \underline{G}$; notre hypothèse entraîne donc

$$(2) \qquad \tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_a).u \otimes \pi^a = 0.$$

Les vecteurs $\tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_a).u$ sont linéairement indépendants, car $\sum_a \mu_a \tilde{\mathcal{R}}(\varepsilon_a).u = 0$ entraîne $\sum_a \tilde{\mathcal{R}}(\mu^a \varepsilon_a).u = 0$ c'est-à-dire $\mu^a \varepsilon_a \in \underline{G}$

ce qui est absurde; par conséquent (2) entraîne la nullité des formes π^a, et π est à valeurs dans $\underline{G}$. Nous avons établi :

THÉORÈME III, 5, 2. — *Si la* G-*structure* S *sur* X *peut être définie par le tenseur t sur* E(X) (*resp.* $E^C(X)$), *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une connexion linéaire* (*resp. linéaire complexe*) *sur* X *soit l'extension d'une* S-*connexion est que la différentielle absolue de t dans cette connexion soit nulle.*

Ce théorème contient la caractérisation des connexions linéaires qui sont euclidiennes pour une métrique donnée ([22], § 51), presque complexes ([22] § 109), presque hermitiennes (une structure presque hermitienne étant définie par deux tenseurs, le tenseur métrique et le tenseur presque complexe, entre dans notre classe de structures : deux tenseurs pouvant être considérés comme un seul tenseur à valeurs dans la somme directe de leurs espaces de valeurs). Il contient de même la caractérisation des connexions linéaires complexes qui sont des π-connexions pour une π-structure donnée ([18] ch. II, § 6), des connexions linéaires complexes qui sont des connexions presque hermitiennes au sens large pour une structure presque hermitienne au sens large donnée ([17]) (ibid. ch. III, § 4).

B) *Torsion.* — Dans ces deux alinéas, $H = H(X, G)$ est un espace de repères muni d'une connexion γ déterminée; K désigne l'un ou l'autre des corps R ou C suivant que H est réel ou complexe. L'existence sur H de la 1-forme fondamentale ω à valeurs dans K^m entraîne l'existence pour la connexion γ d'un invariant supplémentaire, la *forme de torsion :*

$$\Sigma = \nabla\omega = d\omega + \pi.\omega \tag{2}$$

(puisque la représentation de G dans K^m définissant le type de ω est sa représentation comme groupe linéaire de K^m). Le tenseur $t\Sigma$ associé à Σ sur H est le *tenseur de torsion* de γ. Naturellement Σ et $t\Sigma$ sont les formes et le tenseur induits sur H par la torsion

$$\hat{\Sigma} = \hat{\nabla}\theta = d\theta + \hat{\pi}.\theta \tag{3}$$

([17]) Une structure presque hermitienne au sens large est définie par G. Legrand [18] par la donnée d'une métrique complexe Φ et d'un champ d'opérateurs $\mathfrak{J}$ sur T^C_X de carré identité, tels que $\Phi(\mathfrak{J}u, \mathfrak{J}v) = -\Phi\,(u, v)$ $u, v \in T^C_X$.

de la connexion linéaire $\hat{\gamma}$ extension de γ et son tenseur canoniquement associé $t\hat{\Sigma}$. L'identité ((5) ch. II, § 4) fournit la différentielle absolue de Σ

$$\nabla\Sigma = \nabla^2\omega = \Omega . \omega. \tag{4}$$

C'est l'identité de Bianchi pour la torsion.

C) *Dérivée covariante. Identité de Ricci généralisée.* — Λ étant une q-forme tensorielle ($q = 0, 1, \ldots, m$) sur l'espace de repères H(X, G) à valeurs dans l'espace vectoriel M (réel si H est réel, complexe si H est complexe), nous appelons dérivée covariante de Λ le tenseur sur H

$$D\Lambda = t\nabla t\Lambda. \tag{5}$$

L'opération de dérivation covariante est propre aux espaces de repères, à la différence de la différenciation absolue qui s'opère sur toute e.f.p. différentiable.

$t\Lambda$ étant un tenseur de type $\mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1}$ à valeurs dans $M \otimes_K \overset{q}{\wedge} (K^{m*})$ $\nabla t\Lambda$ est une 1-forme de même type et $D\Lambda$ est un tenseur de type $\mathcal{R}(g) \otimes \overset{q}{\wedge} g^{-1} \otimes g^{-1}$ à valeurs dans $M \otimes_K \overset{q}{\wedge} K^{m*} \otimes_K K^{m*}$. La formule ((12) § 4) définissant le tenseur associé s'écrit puisque $\nabla t\Lambda$ est une 1-forme

$$\nabla t\Lambda = (D\Lambda) . \omega. \tag{6}$$

Lorsque Λ est un tenseur W, comme $tW = W$, (5) devient $DW = t\nabla W$ et (6)

$$\nabla W = (DW) . \omega. \tag{7}$$

Dans ce cas et si $H = E$, ou bien si Λ est une forme de type identité (image réciproque d'une forme de X) on retrouve la notion habituelle de dérivée covariante. Quand $q > 0$, au contraire, $t\nabla\Lambda$ est un tenseur à valeurs dans $M \otimes \overset{q+1}{\wedge} K^{m*}$ et de type $R(g) \otimes \overset{q+1}{\wedge} g^{-1}$ qui n'a donc aucune raison de coïncider avec $D\Lambda$. De la relation ((12) § 4)

$$\Lambda = (t\Lambda) . \left(\overset{q}{\wedge} \omega\right)$$

on déduit, en appliquant la formule de différentiation d'un produit de ce type ((8), ch. II, § 4)

$$\nabla\Lambda = (\nabla t\Lambda) . \left(\overset{q}{\wedge} \omega\right) + (t\Lambda) . \left(\nabla \overset{q}{\wedge} \omega\right). \tag{8}$$

Cette formule qui peut aussi s'écrire d'après (6)

$$(9)\quad \nabla\Lambda = (t\nabla\Lambda).\overset{q+1}{\wedge}\omega = (\mathrm{D}\Lambda.\omega).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + (t\Lambda).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$

permettra de calculer la différentielle absolue en fonction de la dérivée covariante et de $\nabla\overset{q}{\wedge}\omega$.

Appliquons-la d'abord au cas où $\Lambda = \nabla\Phi$ (Φ, $(q-1)$-forme tensorielle)

$$\nabla^2\Phi = ((\mathrm{D}\nabla\Phi).\omega).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + (t\nabla\Phi).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right).$$

Comme d'autre part $\nabla^2\Phi = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\Phi$ ((5) Ch. II, § 4) on obtient l'identité

$$(10)\quad ((\mathrm{D}\nabla\Phi).\omega).\overset{q}{\wedge}\omega = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\Phi - (t\nabla\Phi).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$
$$(\text{degré}\,\Phi = q-1)$$

à laquelle on peut donner le nom d'*identité de Ricci généralisée.* Prenons en effet le cas où Φ est un tenseur W ($q = 1$); comme $\mathrm{W} = t\mathrm{W}$ et $\mathrm{DW} = t\nabla\mathrm{W}$ on a

$$\mathrm{D}\nabla\mathrm{W} = t\nabla t\nabla t\mathrm{W} = t\nabla t\mathrm{DW} = \mathrm{D}^2\mathrm{W}$$

et (10) s'écrit alors

$$(11)\quad (\mathrm{D}^2\mathrm{W}.\omega).\omega = \tilde{\mathfrak{R}}(\Omega).\mathrm{W} - (\mathrm{DW}).\Sigma.$$

Cette formule est l'*identité de Ricci* proprement dite (plus générale d'ailleurs que l'identité habituelle puisque la représentation $\mathfrak{R}$ est quelconque). Pour le voir écrivons-la explicitement lorsque $\mathrm{W} = \mathrm{V}$ est un champ de vecteurs, en prenant les notations habituelles pour les composantes de la dérivée covariante. (11) s'écrit

$$(12)\quad (\mathrm{D}^2\mathrm{V}.\omega).\omega = \Omega.\mathrm{V} - (\mathrm{DV}).\Sigma$$

soit

$$(13)\quad (\nabla_\lambda\nabla_\mu \mathrm{V}^i\omega^\lambda)\wedge\omega^\mu = \Omega^i_j.\mathrm{V}^j - \nabla_k\mathrm{V}^i\Sigma^k.$$

Comme, avec les normalisations habituelles

$$\Omega^i_j = \frac{1}{2}\mathrm{R}^i_{j.\,\lambda\mu}\omega^\lambda\wedge\omega^\mu \qquad \text{et} \qquad \Sigma^k = -\,\mathrm{S}^k_{\lambda\mu}\omega^\lambda\wedge\omega^\mu$$

$R^i_{j,\lambda\mu}$ et $S^k_{\lambda\mu}$ étant antisymétriques en λ et μ, on obtient

(14)
$$\frac{1}{2}(\nabla_\lambda\nabla_\mu V^i - \nabla_\mu\nabla_\lambda V^i)\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu = \frac{1}{2}(R^i_{j,\lambda\mu}V^j + \nabla_k V^i . S^k_{\lambda\mu})\,\omega^\lambda \wedge \omega^\mu$$

soit enfin

$$\nabla_\lambda\nabla_\mu V^i - \nabla_\mu\nabla_\lambda V^i = R^i_{j,\lambda\mu}V^j + \nabla_k V^i . S^k_{\lambda\mu}.$$

Pour obtenir maintenant la forme explicite de (9) calculons $\nabla \overset{q}{\wedge}\omega$. De la définition de $\overset{q}{\wedge}\omega$ (ch. II, 2, E) et du caractère tensoriel de ω découle que $\overset{q}{\wedge}\omega$ est une forme tensorielle de type $\overset{q}{\wedge}(G)$ et

$$\nabla\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) = d\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) + \overset{\widetilde{q}}{\wedge}(\pi).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)$$

$\{e_i\}$ étant la base canonique de K^m. La formule ((24) ch. II, § 2) donne l'expression de $\overset{q}{\wedge}\omega$ à l'aide des composantes ω^i de ω dans cette base

$$\overset{q}{\wedge}\omega = \frac{1}{q!}e_{i_1}\wedge \dots \wedge e_{i_q} \otimes \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_q}$$

d'où

(15)
$$d\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right) = \frac{1}{q!}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}e_{i_1}\wedge \dots \wedge e_{i_q} \otimes \omega^{i_1}\wedge \dots \wedge d\omega^k \wedge \dots \wedge \omega^{i_q}.$$

D'autre part, un calcul facile montre que dans la base $B = \{e_{i_1}\wedge \dots \wedge e_{i_q},\ i_1 < i_2 \dots < i_q\}$ de $\overset{q}{\wedge}K^m$, l'opération $\overset{\widetilde{q}}{\wedge}(\lambda)$ ($\lambda \in \underline{L_m}$, resp. $\underline{CL_m}$) est donnée par ses composantes

$$\left(\overset{\widetilde{q}}{\wedge}(\lambda)\right)^{l_1 \dots l_q}_{i_1 \dots i_q} = \sum_{h=1}^{q} \varepsilon^{l_1 \dots l_q}_{i_1 \dots \underset{i_h}{p} \dots i_q}\lambda^p_{i_h}\ (^{18})$$

où $\varepsilon^{l_1 \dots l_q}_{i_1 \dots i_q}$ est l'indicateur de permutation et λ^p_r les composantes

(18) Une suite d'indices $e_1 \dots \underset{i_h}{p} \dots i_q$ représente la suite obtenue en remplaçant dans la suite $i_1 \dots i_h \dots i_q$, i_h par p. De même une suite $i_1 \dots \hat{i}_h \dots i_q$ représente la suite $i_1 \dots i_q$ où le terme i_h a été supprimé.

de λ dans la base canonique de $\underline{L_m}$ (resp. $\underline{CL_m}$) alors les composantes dans la base B de $\varphi = \left(\widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\pi) . \overset{q}{\wedge}\omega\right)$ sont

$$\varphi^{l_1 \ldots l_q} = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \widetilde{\overset{q}{\wedge}}(\pi)^{l_1 \ldots l_q}_{i_1 \ldots i_q} \wedge \left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)^{i_1 \ldots i_q}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} \sum_{i_1 < \cdots < i_q} \varepsilon^{l_1 \ldots l_q}_{i_1 \ldots \underset{\hat{i}_k}{p} \ldots i_q} \pi^p_{i_k} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

$$= \frac{1}{q!} \sum_{k=1}^{q} \varepsilon^{l_1 \ldots l_q}_{i_1 \ldots \underset{\hat{i}_k}{p} \ldots i_q} \pi^p_{i_k} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

ou, en faisant passer ω^{i_k} et p à la première place

$$\varphi^{l_1 \ldots l_q} = \frac{1}{q!} \sum_{k=1}^{q} \varepsilon^{l_1 \ldots l_q}_{p i_1 \ldots \hat{i}_k \ldots i_q} (\pi^p_{i_k} \wedge \omega^{i_k}) \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{k-1}} \wedge \omega^{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

puis, en supprimant la sommation par rapport à k

$$\varphi^{l_1 \ldots l_q} = \frac{1}{(q-1)!} \varepsilon^{l_1 \ldots l_q}_{p i_2 \ldots i_q} (\pi^p_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{i_2} \ldots \wedge \omega^{i_q}$$

dans cette somme, la somme des termes ou $p = l_1$ est

$$\frac{1}{(q-1)!} \varepsilon^{l_1 l_2 \ldots l_q}_{l_1 i_2 \ldots i_q} (\pi^{l_1}_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{i_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_q} = (\pi^{l_1}_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{l_2} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}$$

et, en procédant de même pour chaque indice l, il vient :

(16)

$$\varphi^{l_1 \ldots l_q} = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \omega^{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_{k-1}} \wedge (\pi^{l_k}_r \wedge \omega^r) \wedge \omega^{l_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}$$

Comme cette expression est antisymétrique par rapport aux l,

$$\varphi = \sum_{i_1 < \cdots < i_q} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \otimes \varphi^{i_1 \ldots i_q} = \frac{1}{q!} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_q} \otimes \varphi^{i_1 \ldots i_q}$$

et on obtient, en rapprochant (15) et (16), les composantes dans B de $\left(\nabla \overset{q}{\wedge} \omega\right)$

(17)

$$\left(\nabla \overset{q}{\wedge} \omega\right)^{l_1 \ldots l_q} = \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \omega^{l_1} \wedge \ldots \wedge (d\omega^{l_k} + \pi^{l_k}_r \wedge \omega^r) \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}$$

$$= \sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \omega^{l_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_{k-1}} \wedge \Sigma^{l_k} \wedge \omega^{l_{k+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{l_q}.$$

Calculons maintenant chacun des termes de (9) dans la base $\{e_A\}$ de M :

$$(18)\qquad (\nabla\Lambda)^A = \frac{1}{(q+1)!}(t\nabla\Lambda)^A_{i_0 i_1 \ldots i_q}\omega^{i_0}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$$

$$(19)\qquad \left[(D\Lambda.\omega).\left(\overset{q}{\wedge}\omega\right)\right]^A$$
$$= \frac{1}{q!}((D\Lambda)^A_{i_0, i_1\ldots i_q}\omega_{i_0})\wedge\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$$
$$= \frac{1}{(q+1)!}\left(\sum_{l=0}^{q}(-1)^l(D\Lambda)^A_{i_l, i_0\ldots\hat{i}_l\ldots i_q}\right)\omega^{i_0}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$$

pour rendre le coefficient de $\omega^{i_0}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$ antisymétrique par rapport aux i.

D'autre part,

$$(20)\qquad \left[(t\Lambda).\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)\right]^A$$
$$= \frac{1}{q!}(t\Lambda)^A_{l_1\ldots l_q}\left(\nabla\overset{q}{\wedge}\omega\right)^{l_1\ldots l_q},$$
$$= \frac{1}{q!}(t\Lambda)^A_{l_1\ldots l_q}\sum_{k=1}^{q}(-1)^{k-1}\omega^{l_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{l_{k-1}}\wedge\Sigma^{l_k}\wedge\omega^{l_{k+1}}\wedge\ldots\wedge\omega^{l_q},$$
$$= \frac{1}{(q-1)!}(t\Lambda)^A_{pi_2\ldots i_q}\Sigma^p\wedge\omega^{i_2}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}.$$
$$= -\frac{1}{(q-1)!}(t\Lambda)^A_{pi_2\ldots i_q}S^p_{i_0 i_1}\omega^{i_0}\wedge\omega^{i_1}\wedge\omega^{i_2}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q},$$
$$= \frac{1}{q!}\sum_{l=1}^{q}(-1)^l S^p_{i_0 i_l}(t\Lambda)^A_{pi_1\ldots\hat{i}_l\ldots i_q}\omega^{i_0}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q},$$
$$= \frac{1}{(q+1)!}\cdot\sum_{\substack{k<l\\ k,\, l=0,1,\ldots q}} 2.(-1)^{k+l}S^p_{i_k i_l}(t\Lambda)^A_{pi_0\ldots\hat{i}_k\ldots\hat{i}_l\ldots i_q}\omega^{i_0}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}.$$

par un calcul d'antisymétrisation de type classique. Alors, dans (18) (19) et (20) les coefficients de $\omega^{i_0}\wedge\ldots\wedge\omega^{i_q}$ étant tous antisymétriques, (9) devient

$$(21)\qquad (t\nabla\Lambda)^A_{i_0 i_1\ldots i_q} - \sum_{l=0}^{q}(-1)^l(D\Lambda)^A_{i_l, i_0\ldots\hat{i}_l\ldots i_q}$$
$$= \sum_{\substack{k<l\\ k,\, l=0,1,\ldots q}} 2(-1)^{(k+l)}S^p_{i_k i_l}(t\Lambda)^A_{pi_0\ldots\hat{i}_k\ldots\hat{i}_l\ldots i_q}.$$

Proposition III, 5. — *Sur un espace de repères, le tenseur associé à la différentielle absolue d'une q-forme Λ est égal à l'antisymétrisé de la dérivée covariante de Λ dans une connexion* *à torsion nulle; il en diffère par un terme bilinéaire par rapport à la torsion et au tenseur associé à* Λ *lorsque la torsion n'est pas nulle, suivant la formule* (21).

Application. — Si α est une q-forme scalaire sur X, $\Lambda = p^*\alpha$ est une q-forme de type identité et $\nabla p^*\alpha = dp^*\alpha = p^*d\alpha$; de sorte que l'on obtient, en prenant les images réciproques des deux membres de (21) par une section locale arbitraire et en utilisant les notations classiques, la relation qui lie la différentielle extérieure d'une forme à sa dérivée covariante :

$$(22) \quad (d\alpha)_{i_0 i_1 \dots i_q} - \sum_{l=0}^{q} \nabla \alpha_{i_l, i_0 \dots \hat{i}_l \dots i_q} = \sum_{\substack{k<l \\ k,l=0,1,\dots,q}} 2(-1)^{k+l} S^p_{i_k i_l} \alpha_{p i_0 \dots \hat{i}_k \dots \hat{i}_l \dots i_q}$$

6. — Tenseur de structure d'une G-structure.

A) Soit S une G-structure d'espace de repères H et de forme fondamentale ω. On désigne par K (resp. KL_m) le corps des réels (resp. le groupe L_m) si S est réelle ou le corps des complexes (resp. CL_m) si S est complexe.

Soient γ et γ' des H-connexions de formes π, π'; et Σ, Σ' leurs torsions. Les tenseurs de torsion sont des tenseurs sur H à valeurs dans $P = K^m \otimes_K \overset{2}{\wedge} K^{m*}$ et de type $\mathcal{R}(G)$ où $\mathcal{R}$ est la représentation de KL_m dans P telle que

$$\mathcal{R}(l) = l \otimes \overset{2}{\wedge} l^{-1} \qquad l \in KL_m$$

$\pi' - \pi = u$ est une 1-forme tensorielle sur H de type adjoint à valeurs dans $\underline{G}$. *Supposons, si* S *est complexe, que* $\underline{G}$ *est un sous-espace vectoriel complexe de* $\underline{CL_m}$. Alors (§ 4) u a un tenseur associé $tu = \xi$ sur H — dont la donnée équivaut à celle de u — à valeurs dans $N = N_G = \underline{G} \otimes_K K^{m*}$ et tel que

$$(1) \qquad u = \xi . \omega$$

ξ est de type $\mathcal{Q}(G)$ où $\mathcal{Q}$ est la représentation de KL_m dans $\mathcal{N} = \underline{KL_m} \otimes_K K^{m*}$ telle que $\mathcal{Q}(l) = \operatorname{adj} l \otimes l^{-1}$ ($N_G \subset \mathcal{N}$ est évidemment un sous-espace invariant par $\mathcal{Q}(G)$).

Comme $\mathcal{N} = K^m \otimes_K K^{m*} \otimes_K K^{m*}$, P peut être considéré comme le quotient de $\mathfrak{N}$ par le sous-espace $\mathcal{J}$ engendré par les éléments $x \otimes f \otimes f$ ($x \in \mathrm{K}^m$, $f \in \mathrm{K}^{m*}$). Soit $-\mathcal{A}$ la projection naturelle $\mathfrak{N} \to \mathfrak{N}/\mathcal{J} = \mathrm{P}$ $x \otimes f \otimes f' \to x \otimes (f \wedge f')$. Dans la base canonique $\{e_i\}$ de K^m (et les bases associées des autres espaces) $-\mathcal{A}$ se traduit par

$$t^i_{jk} \to (t^i_{jk} - t^i_{kj})$$

et il est évident sur les définitions que, pour tout $l \in \mathrm{KL}_m$

(2) $$\mathcal{A} \circ \mathcal{Q}(l) = \mathcal{R}(l) \circ \mathcal{A}.$$

Dans une base $\{\varepsilon_\rho = (a^i_{j\rho})\}$ de $\underline{\mathrm{G}}$ (base sur K), les composantes de u sont données d'après (1) par

(3) $$u^\rho = \xi^\rho_k \omega^k$$

(ξ^ρ_k composantes de ξ dans la base $\varepsilon_\rho \otimes x^i$ de $\mathrm{N_G}$). D'après la définition de la torsion ((2) § 5) il vient

$$\begin{aligned} \Sigma' - \Sigma &= (\pi' - \pi) . \omega = u . \omega \\ &= (\varepsilon_\rho \otimes u^\rho) . (e_k \otimes \omega^k) \\ &= (\varepsilon_\rho . e_k) \otimes u^\rho \wedge \omega^k \\ &= a^i_{k\rho} e_i \otimes \xi^\rho_j \omega^j \wedge \omega^k \\ &= e_i \otimes \frac{1}{2} (a^i_{k\rho} \xi^\rho_j - a^i_{j\rho} \xi^\rho_k) \, \omega^j \wedge \omega^k. \end{aligned}$$

La parenthèse étant antisymétrique en j, k, ceci donne d'après ((13) § 4) les composantes de $t(\Sigma' - \Sigma)$ dans la base canonique de P

(4) $$(t\Sigma' - t\Sigma)^i_{jk} = a^i_{k\rho} \xi^\rho_j - a^i_{j\rho} \xi^\rho_k.$$

Comme les composantes de ξ dans la base canonique de $\mathfrak{N}$ sont $t^i_{jk} = a^i_{j\rho} \xi^\rho_k$, (4) se traduit par

$$t\Sigma' - t\Sigma = \mathcal{A} \circ \xi$$

ou, en appelant A la restriction de $\mathcal{A}$ à $\mathrm{N_G} \subset \mathfrak{N}$

(5) $$t\Sigma' - t\Sigma = \mathrm{A} \circ \xi$$

$\mathrm{N_G}$ étant invariant par $\mathcal{Q}(\mathrm{G})$, (2) devient

(6) $$\mathrm{A} \circ \mathcal{Q}(g) = \mathcal{R}(g) \circ \mathrm{A}, \qquad g \in \mathrm{G}.$$

Soient $\mathrm{V_G} = \mathrm{A}(\mathrm{N_G})$, $\mathrm{M} = \mathrm{M_G} = \mathrm{P}/\mathrm{V_G}$ et α la projection naturelle $\mathrm{P} \to \mathrm{M_G}$. D'après (6) $\mathrm{V_G}$ est invariant par $\mathcal{R}(\mathrm{G})$ de sorte que la représentation $\mathcal{R}(G)$ passe au quotient : soit ρ la représentation de G ainsi obtenue dans M ; elle est définie par

$$\rho(g)\circ\alpha = \alpha\circ\mathcal{R}(g). \tag{8}$$

Alors d'après (6) $\alpha\circ t\Sigma' = \alpha\circ t\Sigma$ est une fonction t_S sur H à valeurs dans M (définie globalement et indépendante de la connexion) et telle que

$$t_S(z.g) = \alpha(t\Sigma(z.g)) \quad (z\in H,\ g\in G);$$

soit $$t_S(z.g) = \alpha(\mathcal{R}(g^{-1}).t\Sigma(z)) = \rho(g^{-1}).t_S(z).$$

t_S est donc un tenseur sur H à valeurs dans M et de type $\rho(G)$ qui ne dépend que de la structure : nous l'appelons le *tenseur de structure* de S.

B) Soit réciproquement Σ_1 une 2-forme vectorielle sur H à valeurs dans K^m : est-elle la torsion Σ' d'une H-connexion γ'? Supposons remplie la condition nécessaire $\alpha\circ t\Sigma_1 = t_S$ et soit γ une H-connexion arbitraire. Avec les notations précédentes, la détermination de γ' équivaut à celle de la 1-forme tensorielle $u = \pi' - \pi$ qui équivaut elle-même (prop. III, 4, 2) à celle de son tenseur associé ξ à valeurs dans N. La condition imposée à γ', $\Sigma' = \Sigma_1$, équivaut à $\Sigma' - \Sigma = \Sigma_1 - \Sigma$ où le second membre est une 2-forme tensorielle donnée de même type Σ''; et la condition $\Sigma' - \Sigma = \Sigma''$ équivaut elle-même d'après (5) à

$$A\circ\xi = t\Sigma''. \tag{9}$$

D'autre part l'hypothèse $\alpha\circ t\Sigma_1 = t_S = \alpha\circ t\Sigma$ équivaut à

$$\alpha\circ t\Sigma'' = 0. \tag{10}$$

Soit N(H) (resp. P(H), M(H)) le fibré obtenu par modelage (def. I, 2) de N (resp. P, M) sur H, G opérant sur la fibre par $\mathcal{Q}(G)$ (resp. $\mathcal{R}(G)$, $\rho(G)$); et soit $\widetilde{N(H)}$ (resp. $\widetilde{P(H)}$, $\widetilde{M(H)}$) le faisceau des germes de sections de cet espace. A la suite exacte d'homomorphismes d'espaces vectoriels

$$N \xrightarrow{A} P \xrightarrow{\alpha} M \to O$$

correspond une suite exacte d'homomorphismes de faisceaux

$$\widetilde{N(H)} \xrightarrow{\tilde{A}} \widetilde{P(H)} \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \widetilde{M(H)} \to 0$$

à laquelle correspond elle-même, puisque tous ces faisceaux sont des faisceaux de germes de section d'e.f. à fibre vectorielle, la suite exacte des groupes de cohomologie

$$(11)\quad \mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{N(H)}\big) \xrightarrow{\tilde{A}_0} \mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{P(H)}\big) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_0} \mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{M(H)}\big) \to 0.$$

Les tenseurs sur H à valeurs dans N (resp. P, M) et de type $\mathcal{Q}(G)$ (resp. $\mathfrak{R}(G)$, $\rho(G)$) correspondent biunivoquement aux sections de N(H) (resp. P(H), M(H)) c'est-à-dire aux éléments des groupes de cohomologie $\mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{N(H)}\big)$ $\big($resp. $\mathcal{H}_0(X, \widetilde{P(H)})$, $\mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{M(H)}\big)\big)$. Soit donc $s \in \mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{N(H)}\big)$ l'élément correspondant à ξ, $\sigma \in \mathcal{H}_0\big(X, \widetilde{P(H)}\big)$ celui qui correspond à $t\Sigma''$; (9) et (10) équivalent respectivement à

$$(12)\qquad \tilde{A}_0(s) = \sigma,$$
$$(13)\qquad \tilde{\alpha}_0(\sigma) = 0.$$

La suite (11) étant exacte, l'image de $\tilde{A}_0$ coïncide avec le noyau de $\tilde{\alpha}_0$ et s satisfaisant à (12) existe dès que σ satisfait à (13). Nous avons donc montré l'existence de la connexion γ'.

C) Ces calculs et démonstrations ne s'étendent pas au cas où, S étant complexes, $\underline{G}$ n'est pas un sous-espace vectoriel complexe de $\underline{CL_m}$. Si d'abord $\underline{G}$ n'admet pas de structure d'algèbre de Lie complexe, les adj g ($g \in G$) ne sont pas des automorphismes d'espace vectoriel complexe de $\underline{G}$: et les formes u sur H à valeurs dans $\underline{G}$ de type adjoint n'admettent pas de tenseur associé sur H (cf. § 4). Si même $\underline{G}$ admet une telle structure non induite par celle de $\underline{CL_m}$, l'espace $\underline{G} \otimes_C C^{m*}$ des valeurs des tenseurs associé à u ne s'identifie pas à un sous-espace complexe de $\underline{CL_m} \otimes_C C^{m*}$ et la démonstration tombe encore en défaut.

On peut donc penser à procéder comme au paragraphe 4: soit $\underline{G}' = \underline{G} + i\underline{G}$; les adj g ($g \in G$) sont des automorphismes d'espace vectoriel complexe de $\underline{G}'$ et u un tenseur associé ξ à valeurs dans $\underline{G}' \otimes_C C^{m*} \subset \mathfrak{N}$. Les calculs de l'alinéa A) restent donc valables et permettent encore de définir un « tenseur de structure » t'_S: mais ceux de B) ne le sont pas car ξ est en général astreint à des conditions supplémentaires non linéaires (§ 4). En fait d'ailleurs ce tenseur t'_S n'a aucune raison de caractériser les torsions des S-connexions : soit G′ le sous-groupe connexe de CL_m engendré par $\underline{G}'$ et supposons G lui-même connexe; alors $G' \supset G$ et S est subordonnée à une G′-structure S′, t'_S n'est autre que le tenseur de structure de S′ de sorte qu'il caractérise les torsions des S′-connexions qui en général ne sont pas des S-connexions (cf. § 8, D).

D) Nous allons maintenant énoncer les résultats obtenus et en tirer les premières conséquences.

Définition III, 6. — *Une* G-structure *est dite* de première espèce *si elle est réelle ou si, étant complexe,* G *est un sous-groupe de Lie complexe de* CL_m. *Elle est de seconde espèce dans les autres cas.*

Remarquons que la condition : G sous-groupe de Lie complexe de CL_m (c'est-à-dire l'injection $G \to CL_m$ est une application analytique complexe) équivaut à $\underline{G}$ sous-espace vectoriel de complexe $\underline{CL_m}$.

Théorème III, 6, 1. — *Soit* G *un sous-groupe de Lie de* L_m, *ou un sous-groupe de Lie complexe de* CL_m *:* K *désigne le corps des réels dans le premier cas, le corps des complexes dans le second. A ce groupe est canoniquement associée une représentation* K*-linéaire* ρ *de* G *dans un espace vectoriel* M_G, *image de* $P = K^m \otimes_K \overset{2}{\wedge} K^{m*}$ *par un homomorphisme* α *de telle facon que*

1° *pour toute* G*-structure* S *de première espèce se trouve défini un tenseur* t_S *de type* $\rho(G)$ *à valeurs dans* M_G *sur l'espace* H *des repères distingués de* S : t_S *est le* tenseur de structure de S.

2° *la condition nécessaire et suffisante pour qu'une 2-forme vectorielle* Σ *sur* H *soit la torsion d'une* S*-connexion est*

$$\alpha \circ t^{\Sigma} = t_S.$$

Dans certains cas ce théorème prend une forme plus simple, qui nous le verrons, contient des théorèmes connus :

Théorèmes III, 6, 2. — G *satisfaisant aux mêmes hypothèses que dans le théorème* (III, 6, 1), *supposons de plus que le sous-espace* $V = \alpha^{-1}(0)$ *de* P *admette un supplémentaire* W *également invariant par* $\mathfrak{R}(G)$. *Pour toute* G*-structure de première espèce* S, *et toute* S*-connexion, le tenseur de torsion* (*sur* H) *est la somme* *de deux tenseurs,* $t\Sigma = (t\Sigma)_V + (t\Sigma)_W$ *à valeurs respectivement dans* V *et* W :

1° $(t\Sigma)_W$ *ne dépend pas de la connexion et s'identifie à* t_S ($\rho(G)$ *s'identifie à la représentation induite par* $\mathfrak{R}(G)$ *sur* W);

2° $(t\Sigma)_V$ *ne dépend que de la connexion et peut être choisi arbitrairement par un choix convenable de la connexion: en particulier il existe toujours une* S-*connexion dont le tenseur de torsion soit exactement réduit à* $t_S = (t\Sigma)_W$.

Dans les hypothèses de ce théorème, puisque $(t\Sigma)_V$ et $(t\Sigma)_W$ sont des tenseurs à valeurs dans P de type $\mathfrak{R}(G)$, on a un énoncé analogue donnant une décomposition de la forme de torsion en somme de deux formes. D'autre part, soit π la forme de connexion d'une des connexions pour lesquelles $(t\Sigma)_V = 0$; alors d'après la définition de la torsion on a globalement sur H

$$(13) \quad \begin{cases} d\omega = -\pi.\omega + (t_S).\left(\overset{2}{\wedge}\omega\right) \\ \text{ou } d\omega^i = -\pi^i_j \wedge \omega^i + \frac{1}{2}(t_S)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \\ \text{ou } d\omega^i = a^i_{j\rho}\,\omega^j \wedge \pi^\rho + \frac{1}{2}(t_S)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \end{cases}$$

avec les notations de A); et réciproquement, si π est une H-connexion et si l'on peut écrire $d\omega$ sous la forme (13), t_S étant un tenseur à valeurs dans W, t_S est le tenseur de structure de S.

Dans les seules hypothèses du théorème (III, 6, 1) soit W_1 un supplémentaire de V, en général non invariant. Pour une H-connexion donnée de forme π, on a une décomposition $t\Sigma = (t\Sigma)_V + (t\Sigma)_{W_1}$; $(t\Sigma)_{W_1}(z) = C(z)$ étant la projection de $t_S(z)$ sur W_1 par la projection naturelle q, $P/V \to W_1$, C est une fonction sur H indépendante de la connexion et l'on peut écrire

$$(14) \quad d\omega^i = -\pi^i_j \wedge \omega^j + \frac{1}{2}(t\Sigma)_{V},{}^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k + \frac{1}{2}(C)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Comme $(t\Sigma)_V(z) \in V$, pour tout $z \in H$, les équations aux inconnues $\gamma^\rho_{ik}(\rho = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots m)$

$$(t\Sigma)_V,{}^i_{jk} = a^i_{k\rho}\gamma^\rho_{ij} - a^i_{j\rho}\gamma^\rho_{ik} \qquad (i,\ j,\ k = 1, \ldots, m;\ j < k)$$

sont compatibles, et, comme elles sont à coefficients constants, on peut leur trouver des solutions différentiables $\gamma^\rho_{ik}(z)$ (uniques seulement si l'application A est injective). (14) devient alors puisque $\pi^i_j = a^i_{j\rho}\pi^\rho$

$$d\omega^i = \omega^j \wedge a^i_{j\rho}(\pi^\rho - \eta^\rho_k\omega^k) + \frac{1}{2} C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k$$

ou

$$(15) \quad \begin{cases} d\omega^i = \omega^j \wedge a^i_{j\rho}\pi'^\rho + \frac{1}{2} C^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k \\ \text{soit} \quad d\omega = -\pi'.\omega + C.\overset{2}{\wedge}\omega \end{cases}$$

Dans (15) $\pi' = \varepsilon_\rho \otimes \pi'^\rho$ est une forme globale sur H mais non canoniquement définie; de plus ce n'est pas une forme de connexion sur H, sinon C serait le tenseur de torsion de cette connexion, contrairement à l'hypothèse que W_1 n'est pas invariant par $\mathfrak{R}(G)$. Enfin, dès que l'on a écrit sur H des relations telles que (15) où la fonction C prend ses valeurs dans W_1, C est la projection sur W_1 du tenseur de structure, qu'elle définit donc parfaitement.

En particulier, si l'on prend pour W_1 un supplémentaire de V engendré par un sous-ensemble de la base canonique de P, et si l'on désigne par $t^{i''}_{j''k''}$ les coordonnées de P nulles sur W_1 et par $t^{i'}_{j',k'}$ les autres, (15) s'écrit

$$(16) \qquad d\omega^i = \omega^j \wedge a^i_{j\rho}\pi'^\rho + \frac{1}{2} C^{i'}_{j'k'}\omega^{j'} \wedge \omega^{k'}.$$

Si l'on pose $F^i_{jk} = a^i_{k\rho}\eta^\rho_j - a^i_{j\rho}\eta^\rho_k \, (\eta^\rho_k \in K)\,(i, j, k = 1, ..., m;\ j < k)$ les indices $(^{i''}_{j''k''})$ sont caractérisés par la propriété que les formes linéaires $F^{i''}_{j''k''}$ sont linéairement indépendantes et en nombre maximal: les $C^{i'}_{j'k'}$ sont les *premiers invariants de la structure* tels qu'ils ont été définis par S.S. Chern dans [9] pour le cas réel. Les équations (13), (15) ou (16) peuvent être appelées *équations de structure* de S.

Soient r la dimension de G et s le rang de A. On a $\dim N = mr$ et $\dim P = \frac{m^2(m-1)}{2}$; s, inférieur ou égal à ces deux nombres, est égal au rang du système des $\frac{m^2(m-1)}{2}$ formes linéaires F^i_{jk}. On peut préciser :

Corollaire III, 6, 1. — Si A *est surjective, la torsion peut être choisie arbitrairement*; en particulier, pour toute G-structure S de première espèce il existe toujours une S-connexion à torsion nulle. Dans ce cas $s = \frac{m^2(m-1)}{2}$ ce qui exige $r \geqslant \frac{m(m-1)}{2}$.

COROLLAIRE III, 6, 2. — *Si* A *est injective* (19), *la donnée de la torsion* Σ *détermine la connexion*, pourvu que $\alpha \circ t\Sigma = t_S$. Ceci se produit si $s = mr$ et exige donc $r \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$. Si de plus on est dans les conditions d'application du théorème (III, 6, 2) tout G-structure admet une *connexion canonique* dont le tenseur de torsion coïncide avec le tenseur de structure (cf. 8, ex. B, E).

COROLLAIRE III, 6, 3. — *Si* A *est bijective*, ce qui suppose $r = \frac{m(m-1)}{2}$ d'où, s'il est fermé, G est le groupe orthogonal ou orthogonal spécial d'une forme quadratique non dégénérée définie ou indéfinie, d'après des résultats de Weyl-Cartan (cf. W. Klingenberg [28] — la torsion est arbitraire et détermine univoquement la connexion : en particulier, il y a une *connexion canonique à torsion nulle.*

COROLLAIRE III, 6, 4. — *Pour qu'une* G-*structure* S *de première espèce admette une* S-*connexion à torsion nulle, il faut et suffit que le tenseur de structure soit nul.*

7. — Calculs du tenseur de structure.

A) *Structures équivalentes.* — Soient S et S′ des structures équivalentes d'espaces de repères respectifs H et $H' = H.l$, de groupes G et $G' = l^{-1}.G.l$. On considère soit S et S′ réelles ($l \in L_m$, $K = R$), soit S complexe de première espèce : alors, quel que soit $l \in CL_m$, S′ est complexe de première espèce ($K = C$).

Les différents espaces et applications sont notés comme au § 6, avec un indice s'ils dépendent de S ou G ($N' = N'_{G'} \ldots$). Alors

$$N' = \underline{G}' \otimes_K K^{m*} = l^{-1}\underline{G}.l \otimes_K K^{m*} = \mathcal{Q}(l^{-1})N$$

$$\text{et} \quad V' = \mathcal{A}(N') = \mathcal{A} \circ \mathcal{Q}(l^{-1})(N) = \mathcal{R}(l^{-1})\mathcal{A}(N) = \mathcal{R}(l^{-1})V$$

de sorte que

(19) Dans le cas réel, cette hypothèse équivaut à celle-ci : 1er groupe déduit de G = identité (S. S. Chern [9]) ou G de type fini de degré 2 (P. Libermann). Cette remarque contient donc un théorème de P. Libermann dans [21]. C'est aussi la propriété (C) de Chern dans [10].

a) comme rang de $A = \dim V$, on a rang de $A =$ rang de A' et les deux structures sont dans la même situation pour les corollaires du § 6.

b) l'automorphisme $\mathcal{R}(l^{-1})$ de P passe aux quotients, donnant un isomorphisme $\bar{\rho}(l^{-1}) : M = P/V \to M' = P/V'$ tel que $\alpha' \circ \mathcal{R}(l^{-1}) = \bar{\rho}(l^{-1}) \circ \alpha$.

Soit γ une S-connexion et $\hat{\gamma}$ la connexion linéaire (resp. linéaire complexe) extension de γ : $\hat{\gamma}$ est aussi l'extension d'une S'-connexion γ' (invariance du champ de connexion par translations à droite) et, si Σ et Σ' sont les torsions (sur H et H') de γ et γ' :

$$t\Sigma'(z.l) = \mathcal{R}(l^{-1})t\Sigma(z) \quad (z \in H)$$

d'où

$$t_{S'}(z.l) = \alpha' \circ t\Sigma'(z.l) = \alpha' \circ \mathcal{R}(l^{-1})t\Sigma'(z) = \bar{\rho}(l^{-1}) \circ \alpha t\Sigma(z) = \bar{\rho}(l^{-1})t_S(z).$$

On a donc entre les deux tenseurs de structure la relation

$$(1) \qquad D_l^* t_{S'} = \bar{\rho}(l^{-1})t_S.$$

En particulier, si S' est une *structure associée à* S, $l = n \in N(G)$ (resp. $N^C(G)$); $G' = G$ entraîne $M' = M$, $\alpha' = \alpha$ et $\bar{\rho}(n^{-1})$ est l'automorphisme de M défini par

$$(2) \qquad \alpha \circ \mathcal{R}(n^{-1}) = \bar{\rho}(n^{-1}) \circ \alpha$$

$\bar{\rho}$ est une représentation de N(G) dans M dont la restriction à $G \subset N(G)$ est ρ.

B) *Structures subordonnées.* — Soit avec les mêmes notations, S subordonnée à S'. Alors $G \subset G'$ entraîne $N \subset N'$ et $V = \mathcal{A}(N) \subset V' = \mathcal{A}(N')$ de sorte que

a) si A est surjective, A' l'est aussi;

b) si A' est injective, A l'est aussi : c'est-à-dire que, *si pour une* G-*structure la torsion détermine la connexion il en est de même pour les structures subordonnées.*

Les inclusions $V \subset V' \subset P$ entraînent l'existence d'une projection $\alpha_1 : P/V \to P/V'$ telle que $\alpha_1 \circ \alpha = \alpha'$ et que $\alpha_1 \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \alpha'$ $(g \in G)$. Soient i l'injection $H \to H'$ $(H \subset H')$, γ une H-connexion de forme π et γ' son extension à H', de forme π'. Alors $\omega = i^*\omega'$ et $\pi = i^*\pi'$ entraînent $\Sigma = i^*\Sigma'$ et $t\Sigma = i^*t\Sigma'$, d'où, puisque $t_S = \alpha \circ t\Sigma$

$$\alpha_1 \circ t_S = \alpha_1 \circ \alpha \circ t\Sigma = \alpha' \circ i^*t\Sigma' = i^*\alpha' \circ t\Sigma$$

soit

$$(2) \qquad \alpha_1 . t_S = i^* t_{S'}$$

$t_{S'}$ étant déterminé par sa restriction $i^* t_{S'}$ à H', (2) définit $t_{S'}$.

Cependant, si S est la plus grande structure subordonnée commune à S' et S'' ($H = H' \cap H''$), $N = N' \cap N''$ mais, comme en général $\mathcal{A}(N' \cap N'') \neq \mathcal{A}(N) \cap \mathcal{A}(N')$, les tenseurs de structure de S' et S'' ne suffisent pas en général à déterminer celui de S (cf. 8, E).

C) *Calcul local.* — Soient $U \subset X$, s une section locale distinguée et θ_U le corepère dual sur U. Le champ des plans tangents à l'image de la section s et de leurs translatés à droite par G détermine sur H_U une connexion ; celle-ci peut être étendue en une connexion sur H de forme π. Dans cette connexion

$$\Sigma = d\omega + \pi . \omega$$
$$s^*\Sigma = s^* d\omega + s^*\pi . s^*\omega = d\theta_U$$

puisque, par définition, $s^*\pi = 0$; on a donc les composantes

$$(3) \qquad (s^*\Sigma)^i = d\theta_U^i = \frac{1}{2} (C_U)^i_{jk} \theta_U^j \wedge \theta_U^k.$$

où les $(C_U)^i_{jk}$, antisymétriques en j, k, déterminent une application $C_U : U \to P$. D'autre part, de $\Sigma = (t\Sigma) . \overset{2}{\wedge} \omega$ on déduit

$$(4) \quad s^*\Sigma = (s^* t\Sigma) . \overset{2}{\wedge} \theta_U \qquad \text{ou} \qquad (s^*\Sigma)^i = \frac{1}{2} (s^* t\Sigma)^i_{jk} \theta_U^j \wedge \theta_U^k.$$

La comparaison de (3) et (4) donne enfin

$$s^* t_S = s^*(\alpha \circ t\Sigma) = \alpha . s^* t\Sigma = \alpha . C_U$$

d'où

Proposition III, 7. — *θ_U étant un corepère distingué sur* U, *l'expression de t_S dans le repère dual s'obtient ainsi :*

$$(t_S)_U = \alpha . C_U$$

où $C_U : U \to P$ est l'application définie par $d\theta_u^i = \frac{1}{2} (C_U)^i_{jk} \theta_u^j \wedge \theta_u^k$.

Corollaire III, 7. — *Une G-structure intégrable a un tenseur de structure nul.*

La réciproque, fausse en général (cf. 8, B), est vraie dans de nombreux cas (cf. 8 C, D, F et ch. IV, § 3). Aussi poserons-nous

DÉFINITION III, 7. — *Une* G-*structure est dite* presque intégrable *si son tenseur de structure est nul.*

8. — Applications. Exemples.

A) Soit $X = G/H$ un espace homogène réductif. Sa connexion de Cartan [20] détermine pour chacune des $\tilde{H}_{Z_0}$-structures S définies dans la proposition (III, 1) une connexion à torsion nulle : *ces structures ont donc un tenseur de structure nul.*

B) $O(m)$-*structures réelles.* ($K = R$) $\underline{G}$ est la sous-algèbre des matrices $(A^i_j) \in L_m$ telles que $A^i_j + \overline{A^j_i} = 0$; N est donc le sous-espace des $t \in \overline{\mathfrak{N}}$ de coordonnées t^i_{jk} telles que $t^i_{jk} + t^j_{ik} = 0$. Comme d'autre part

$$\dim G = \frac{m(m-1)}{2}, \qquad \dim N = \frac{m^2(m-1)}{2} = \dim P$$

et, pour montrer que A est bijective, il suffit de montrer que $A^{-1}(O) = 0$. Or, le système d'équations définissant $A^{-1}(O)$:

$$t^i_{jk} + t^j_{ik} = 0, \qquad t^i_{kj} - t^i_{jk} = 0$$

est cramérien (cf. calcul des symboles de Christoffel) et $A^{-1}\ (O) = 0$. Conséquences :

a) $M = 0$; toute $O(m)$-structure S admet une S-connexion canonique à torsion nulle : la connexion riemannienne. De plus (§ 6, B) pour tout groupe $G' \supset O(m)$ on a encore $M' = 0$: ainsi pour $G' = L_m$, ...

b) Tout sous-groupe fermé $G' \subset O(m)$ étant compact, le sous-espace $V_{G'} \subset P$ invariant par $\mathcal{R}(G')$ admet un supplémentaire W également invariant et le théorème (III, 6, 2) s'applique aux G'-structures réelles S' : en particulier, il y a une S'-connexion dont la torsion coïncide avec le tenseur de structure de S'; et comme A' est comme A, injective cette connexion est unique.

[20] A. Lichnerowicz [23] § 37.

PROPOSITION III, 8, 1. — *Pour toute* G′*-structure* S′ *subordonnée à une structure riemannienne, il existe* une S′-connexion canonique *dont la torsion coïncide avec le tenseur de structure. Pour que le tenseur de structure soit nul il faut et suffit que cette connexion canonique coïncide avec la connexion riemannienne.*

C) Soit S une *structure presque produit* réel (K = R) ou complexe (K = C) G = KL(n_1, n_2). Utilisons les indices α, β, γ, ... = 1, 2, ..., n_1 et α', β', γ', ... = $n_1 + 1$, ..., $n_1 + n_2$. En notant $\{e_i\}$ (resp. $\{f^j\}$) la base de K^m (resp. la base duale) $\underline{G}$ est l'algèbre des matrices sur K

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

et a pour base $\{\varepsilon_\alpha^\beta = e_\alpha \otimes f^\beta ; \varepsilon_{\alpha'}^{\beta'} = e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'}\}$; d'où une base de N

$$\{e_\alpha \otimes f^\beta \otimes f^\gamma,\ e_\alpha \otimes f^\beta \otimes f^{\gamma'},\ e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'} \otimes f^\gamma,\ e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'} \otimes f^{\gamma'}\} ;$$

puis de V = A(N)

$$\{e_\alpha \otimes f^\beta \wedge f^\gamma (\beta < \gamma),\ e_\alpha \otimes f^\beta \wedge f^{\gamma'},\ e_{\alpha'} \otimes f^{\beta'} \wedge f^\gamma,\ e_{\alpha'} \otimes {}^{\beta'} \wedge f^{\gamma'} (\beta' < \gamma')\}$$

V a donc le supplémentaire W, également invariant par G de base

$$\{e_\alpha \otimes f^{\beta'} \wedge f^{\gamma'} (\beta' < \gamma'),\ e_{\alpha'} \otimes f^\beta \wedge f^\gamma (\beta < \gamma)\}$$

t_S *est donc le tenseur déterminé par les seules composantes* $t^\alpha_{\beta'\gamma'}$, $t^{\alpha'}_{\beta\gamma}$ *du tenseur de torsion de n'importe quelle* S*-connexion.* Dans une connexion dont la torsion se réduit à t_S on a d'après ((13) § 6)

$$\begin{cases} d\omega^\alpha = -\pi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta + \dfrac{1}{2} t^\alpha_{\beta'\gamma'}\ \omega^{\beta'} \wedge {}^{\gamma'} \\ d\omega^{\alpha'} = -\pi^{\alpha'}_{\beta'} \wedge \omega^{\beta'} + \dfrac{1}{2} t^{\alpha'}_{\beta\gamma}\ \omega^\beta \wedge {}^\gamma \end{cases}$$

d'où

$$(1) \qquad \begin{cases} d\omega^\alpha \equiv \dfrac{1}{2} t^\alpha_{\beta'\gamma'} \omega^{\beta'} \wedge \omega^{\gamma'} \ (\text{mod. } \omega^\beta) \\ d\omega^{\alpha'} \equiv \dfrac{1}{2} t^{\alpha'}_{\beta\gamma} \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \ (\text{mod. } \omega^{\beta'}) \end{cases}$$

ce qui permet d'identifier notre tenseur de structure au « tenseur de torsion de la structure presque produit » défini par

G. Legrand [18] et les résultats du § 6 contiennent certains de ses résultats.

D) Soit maintenant une *structure presque complexe* $\mathcal{S}$ (notations : § 1) $(m = 2n)\,CL_n^b$ n'est pas un sous-groupe de Lie complexe de CL_{2n} et notre théorie ne s'applique pas à la CL_n^b-structure complexe S qui détermine $\mathcal{S}$. On voit facilement que $\underline{CL}_n^b + i\underline{CL}_n^b = \underline{CL\ (n,\ n)}$ et comme CL (n, n) est connexe, la plus petite structure de première espèce à laquelle S soit subordonnée est la structure presque produit complexe qu'elle détermine. Or, dans $E^b(X)$, (1) devient

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} d\omega^\alpha &\equiv \frac{1}{2}\, t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}\omega^{\beta^*} \wedge \omega^{\gamma^*} \,(\mathrm{mod.}\ \omega^\beta) \\ d\omega^{\alpha^*} &\equiv \frac{1}{2}\, t^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta \wedge \omega^\gamma \,(\mathrm{mod.}\ \omega^{\beta^*}) \end{aligned}\right.$$

relation qui caractérise la « torsion presque complexe ». Celle-ci s'identifie donc au tenseur de structure de la π-structure définie par $\mathcal{S}$.

Il est cependant évident que la seule condition $T^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = t^\alpha_{\beta^*\gamma^*}$, $T^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = t^{\alpha^*}_{\beta\gamma}$ ne suffit pas à caractériser les tenseurs T à valeurs dans P qui sont les torsions d'une connexion presque complexe. Mais nous allons voir que, *dans ce cas très particulier*, les conditions supplémentaires mentionnées au § 6, C) s'expriment simplement.

Soient les indices $i, j, k = 1, 2, \ldots, 2n$ et les composantes π^i_j (dans la base canonique de $\underline{CL}_{2n}$) d'une S^b-connexion π : d'après la définition de CL_n^b, $\pi^\alpha_{\beta^*} = \pi^{\alpha^*}_\beta = 0$ et $\pi^{\alpha^*}_{\beta^*} = \overline{\pi^\alpha_\beta}$. Comme d'autre part, $\omega^{\alpha^*} = \overline{\omega^\alpha}$, on a pour la torsion

$$\Sigma^\alpha = d\omega^\alpha + \pi^\alpha_\beta \wedge \omega^\beta \qquad \text{et} \qquad \Sigma^{\alpha^*} = d\omega^{\alpha^*} + \pi^{\alpha^*}_{\beta^*} \wedge \omega^{\beta^*} = \overline{\Sigma^\alpha}.$$

Une première condition pour qu'une 2-forme vectorielle sur $E^b(X)$ de composantes Σ^i soit la torsion d'une S-connexion est donc : $\Sigma^{\alpha^*} = \overline{\Sigma^\alpha}$. Les formes qui y satisfont sont déterminées biunivoquement par les 2-forme $\hat{\Sigma}$ sur $E^b(X)$ à valeurs dans C^n de type vectoriel (CL_n^b opérant sur C^n par le groupe isomorphe CL_n) dont les composantes sont $\hat{\Sigma}^\alpha = \Sigma^\alpha$. $t\hat{\Sigma}$ est à valeurs dans $P_1 = C^n \otimes \overset{2}{\wedge}(C^{2n})^*$ (coordonnées t^α_{jk}) et de type $\mathcal{R}_1(CL_n^b)$.

D'autre part, si l'on compare les torsions de deux connexions, il vient $\Sigma'^{\alpha} - \Sigma^{\alpha} = u^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta}$ où les 1-forme u^i_j sont les composantes de $u = \pi' - \pi$ dans la base de $\underline{CL_{2n}}$. Les seules formes u^{α}_{β} déterminent u puisque $u^{\alpha}_{\beta^*} = u^{\alpha^*}_{\beta} = 0$, $u^{\alpha^*}_{\beta^*} = \overline{u^{\alpha}_{\beta}}$: elles constituent aussi les composantes d'une 1-forme $\hat{u}$ à valeurs dans $\underline{CL_n}$ et de type adjoint qui, elle, admet un tenseur associé λ sur H à valeurs dans $N_1 = \underline{CL_n} \otimes C^{2n^*} = C^n \otimes C^{n^*} \otimes C^{2n^*}$ et de type $\mathcal{Q}_1(CL^b_n)$. Et l'on a $\hat{u} = \lambda . \omega$ soit $u^{\alpha}_{\beta} = \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} + \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\gamma^*}$. Si $\mathfrak{N}_1 = C^n \otimes C^{2n^*} \otimes C^{2n^*}$, N_1 s'identifie au sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{N}_1$, $\lambda^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = 0$. On a encore une projection $-\mathcal{A}_1$, $\mathfrak{N}_1 \rightarrow P$ $(t^{\alpha}_{jk} \rightarrow t^{\alpha}_{jk} - t^{\alpha}_{kj})$ et la relation de commutation $\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{Q}_1(g) = \mathcal{R}_1(g) \circ \mathcal{A}_1$. Alors

$$(3) \quad \Sigma'^{\alpha} - \Sigma^{\alpha} = (\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\gamma} + \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\gamma^*}) \wedge \omega^{\beta}$$
$$= \frac{1}{2}(\lambda^{\alpha}_{\gamma\beta} - \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma})\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} - \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma^*},$$

qui s'écrit encore $\widehat{t\Sigma'} - \widehat{t\Sigma} = A_1 \circ \lambda$($A_1$ restriction de $\mathcal{A}_1$ à N_1). On voit donc que la théorie se développe comme au § 6, réciproque comprise. De plus $V_1 = A(N_1)$ est le sous-espace de P_1 d'équation $t^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = 0$ qui admet le supplémentaire invariant W d'équations $t^{\alpha}_{\beta\gamma} = t^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = 0$. Ainsi se trouve établie :

Proposition III, 8, 2. — *Le tenseur de « torsion presque complexe » t d'une structure presque complexe n'est autre que le tenseur de structure de la π-structure qu'elle détermine. Pour qu'une 2-forme vectorielle Σ sur l'espace $E^b(X)$ des repères complexes adaptés soit la torsion d'une connexion presque complexe, il faut et suffit qu'elle satisfasse aux deux conditions* :

1° $\qquad (t\Sigma)^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = \underline{t^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*}}$,

2° $\qquad \Sigma^{\alpha^*} = \overline{\Sigma^{\alpha}}$.

On aurait pu, en utilisant l'espace des repères *réels* $E^a(X)$ obtenir cette proposition par simple application du théorème (III, 6, 2) : il nous a semblé plus intéressant de mettre en évidence d'une part, les particularités d'une structure presque complexe parmi les G-structures complexes, d'autre part le genre de difficultés que l'on rencontre pour les G-structures complexes de seconde espèce.

E) Pour une *structure presque hermitienne* définie par son espace de repères complexes adaptés $\varepsilon^b(X) \subset E^b(X)$ (notations du § 3) on est dans une situation analogue. En conservant les notations de l'alinéa précédent, les composantes de $\hat{u}$ sont astreintes à la condition supplémentaire $u^{\alpha}_{\beta} + \overline{u^{\beta}_{\alpha}} = 0$, et celles de λ à $\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} + \overline{\lambda^{\beta}_{\alpha\gamma^*}} = 0$ $(\lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*} + \overline{\lambda^{\beta}_{\alpha\gamma}} = 0)$. On a donc d'après (3) :

$$\Sigma'^{\alpha} - \Sigma^{\alpha} = \frac{1}{2}(\overline{\lambda^{\beta}_{\alpha\gamma^*}} - \overline{\lambda^{\gamma}_{\alpha\beta^*}})\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} - \lambda^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma^*}$$

sans entrer dans les détails, on voit que le sous-espace invariant V_2 de P_1 dans lequel $\widehat{t\Sigma'} - \widehat{t\Sigma}$ prend ses valeurs a pour équations

$$t^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = 0, \qquad t^{\alpha}_{\beta\gamma} = \overline{t^{\gamma}_{\alpha\beta^*}} - \overline{t^{\beta}_{\alpha\gamma^*}}$$

qui admet le supplémentaire également invariant W d'équation $t^{\alpha}_{\beta\gamma^*} = 0$. Alors, pour toute connexion sur $\varepsilon^{b}(X)$, la torsion

$$(4) \quad \Sigma^{\alpha} = \frac{1}{2}\, a^{\alpha}_{\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + a^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma^*} + \frac{1}{2}\, a^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*}\omega^{\beta^*} \wedge \omega^{\gamma^*}$$

admet la décomposition

$$(5) \qquad \Sigma^{\alpha} = (\Sigma^{\alpha})_{\mathbf{W}} + (\Sigma^{\alpha})_{V_2}$$

où

$$(6) \quad (\Sigma^{\alpha})_{\mathbf{W}} = \frac{1}{2}(a^{\alpha}_{\beta\gamma} - \overline{a^{\gamma}_{\alpha\beta^*}} + \overline{a^{\beta}_{\alpha\gamma^*}})\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + \frac{1}{2} a^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*}\omega^{\beta^*} \wedge \omega^{\gamma^*}$$

$$(\Sigma^{\alpha})_{V_2} = \frac{1}{2}(\overline{a^{\gamma}_{\alpha\beta^*}} - \overline{a^{\beta}_{\alpha\gamma^*}})\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + a^{\alpha}_{\beta\gamma^*}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma^*}.$$

Comme de plus, en passant aux repères réels de $\varepsilon^{a}(X)$, on peut appliquer la proposition (III, 8, 1), on voit que l'on a retrouvé l'existence de la deuxième connexion canonique d'une structure presque hermitienne — unique connexion presque hermitienne dont le tenseur de torsion ne comprenne que des termes de type (2, 0) et (0, 2) — et l'on peut énoncer plus précisément :

PROPOSITION III, 8, 3 ([21]). — *Le tenseur de structure d'une structure presque hermitienne s'identifie au tenseur de torsion de la deuxième connexion canonique. Pour qu'une 2-forme*

([21]) Cf. A. Lichnerowicz [22] § 112, 114 et S. S. Chern [10] et W. Klingenberg [28].

vectorielle (4) *soit la torsion d'une connexion presque hermitienne, il faut et suffit que dans la décomposition* (5), *le terme* (6) *coïncide avec la torsion de la deuxième connexion canonique de la structure, Une variété presque hermitienne presque intégrable est Kählerienne.*

On sait en effet que cette dernière propriété équivaut à la coïncidence de la deuxième connexion canonique et de la connexion riemannienne.

F) Soit G le groupe indiqué par S.S. Chern dans [9] des matrices réelles

$$g = \begin{pmatrix} u & v & w \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (u > 0) \tag{7}$$

$\dim X = 3$; soient les indices i, j, $k = 1, 2, 3$. $\underline{G}$ est la sous-algèbre de $\underline{L}_3$ d'équations $A^i_2 = A^i_3 = 0$ et $\overline{N} = \underline{G} \otimes R^3$ le sous-espace de $\mathfrak{N}$ d'équations $t^i_{2k} = t^i_{3k} = 0$. $V = A(\overline{N})$ est le sous-espace de P d'équations $s^i_{23} = 0$; le sous-espace supplémentaire W_1 d'équations $s^i_{12} = s^i_{13} = 0$ n'est pas invariant par $\mathcal{R}(G)$. Pour $g \in G$ et $s \in W_1$, il vient

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(g)s)^p_{23} &= g^p_i s^i_{jk}(g^{-1})^j_2\,(g^{-1})^k_3 \\ &= g^p_i s^i_{23}(g^{-1})^2_2\,(g^{-1})^3_3 - g^p_i s^i_{23}(g^{-1})^3_2\,(g^{-1})^2_3 = g^p_i s^i_{23}\end{aligned}$$

c'est-à-dire que, si l'on identifie W_1 à R^3 en posant $\lambda^i = s^i_{23}$, la représentation quotient ρ dans W_1 n'est autre que la représentation de G comme groupe linéaire de R^3 : *le tenseur de structure est donc un champ de vecteurs.*

CHAPITRE IV

AUTOMORPHISMES D'UNE G-STRUCTURE

1. — Automorphismes locaux.

A) *Image et image réciproque d'une* G-*structure.* — Soient X et X′ des variétés différentiables de même dimension m, E et E′ (resp. E^C et E'^C) leurs espaces de repères réels (resp. complexes). Si μ est une application régulière (partout de rang m) de X dans X′, son application linéaire tangente au point x, μ_x, est un isomorphisme de T_x sur $T_{\mu x}$ (resp. T_x^C sur $T_{\mu x}^C$). Pour $z \in E_x$ (resp. E_x^C),

$$\tilde{\mu}(z) = \mu_x \circ z \tag{1}$$

est donc un isomorphisme de R^m sur $T_{\mu x}$ (resp. C^m sur $T_{\mu x}^C$) et $\tilde{\mu}(z) \in E'_{\mu x}$ (resp. $E'^C_{\mu x}$). Ainsi $\tilde{\mu}$ est une application de E dans E′ (resp. E^C dans E'^C), et l'on voit immédiatement d'après (1) :

$$\tilde{\mu}(z.g) = \tilde{\mu}(z).g, \qquad g \in L_m \quad (\text{resp. } CL_m) \tag{2}$$

$$p_{E'} \circ \tilde{\mu} = \mu \circ p_E \tag{3}$$

c'est-à-dire que $\tilde{\mu}$ est une L_m-représentation de E dans E′ (resp. CL_m-représentation de E^C dans E'^C) (ch. I, § 3) : $\tilde{\mu}$ *est le prolongement de* μ *à* E (resp. E^C).

Soit θ' (resp. θ) la forme fondamentale de E′ (resp. E) : $\langle \tilde{\mu}^*\theta', \mathfrak{V}_z \rangle = \langle \theta', \tilde{\mu}\mathfrak{V}_z \rangle$; $\tilde{\mu}\mathfrak{V}_z$ étant tangent à E′ au point $\tilde{\mu}(z)$ il vient d'après (1) et (3)

$$\langle \tilde{\mu}^*\theta', \mathfrak{V}_z \rangle = [\tilde{\mu}(z)]^{-1} \circ p_{E'}(\tilde{\mu}\mathfrak{V}_z)$$
$$= [\mu \circ z]^{-1} \circ \mu \circ p_E(\mathfrak{V}_z) = z^{-1} p_E(\mathfrak{V}_z) = \langle \theta, \mathfrak{V}_z \rangle \text{ soit}$$

$$\tilde{\mu}^*\theta' = \theta. \tag{4}$$

Réciproquement (4) caractérise les représentations $\tilde{\mu}$ de E dans E′ qui sont le prolongement d'une application μ de X dans X′.

Soit une G-structure S(G, H) sur X. L'image $\tilde{\mu}(H)$ n'est pas en général un s.e.f.p. parce que, si $\mu(x_1) = \mu(x_2)$, $\tilde{\mu}H_{x_1} \cap \tilde{\mu}H_{x_2} = \emptyset$ en général. Il en est toutefois ainsi d'après la proposition (I, 5, 2) si μ est un homéomorphisme de X sur X′. En effet :

1) $\tilde{\mu}(H_x) = \tilde{\mu}(z.G) = \tilde{\mu}(z).G$ si $z \in H_x$, $x = pz \in X$;

2) Si σ est une section locale de H sur V, $\sigma' = \tilde{\mu}\circ\sigma\circ\mu^{-1}$ est une section locale de $\tilde{\mu}(H)$ sur $\mu(V)$, différentiable car $\tilde{\mu}$ et μ^{-1} le sont dans nos hypothèses.

$\tilde{\mu}(H)$ détermine alors une *G-structure* S′ *sur* X′ qui est *l'image de* S *par l'homéomorphisme* μ. On notera $S' = \mu.S$.

μ étant toujours régulière, mais pas nécessairement un homéomorphisme, soit maintenant donnée une G-structure S′(G, H′) sur X′. L'ensemble $H = \bigcup_{x \in X} H_x$ où

$$H_x = (\tilde{\mu}_x)^{-1}\ H'_{\mu x}\ (x \in X) \tag{5}$$

($\tilde{\mu}_x$ désigne la restriction à H_x de $\tilde{\mu}$) est une G-s.e.f.p. différentiable d'après la proposition (I, 5, 2) car

1) $H_x = z_x.G$ si $z_x \in H_x$ d'après (2);

2) Si σ' est une section différentiable de H′ au-dessus de U, $\sigma = (\tilde{\mu}_x)^{-1}\circ\sigma'\circ\mu$ est une section locale différentiable de E à valeurs dans H (il suffit de remarquer que μ est localement un homéomorphisme). H est l'image réciproque de H′ par μ, et il détermine une *G-structure* S *image réciproque de* S′ par μ. On notera $S = \mu^*S'$ et $H = \mu^*H'$, H s'identifie d'ailleurs à l'image réciproque de H′ au sens de la théorie des espaces fibrés. Ainsi, en particulier, tout revêtement d'un espace X muni d'une G-structure est muni canoniquement d'une G-structure image réciproque. Si $\tilde{\mu}_H$ est la restriction de $\tilde{\mu}$ à H, $\tilde{\mu}_H$ est une représentation de $H = \mu^*H'$ sur H′ et de (4) l'on déduit :

$$\tilde{\mu}_H^*\omega' = \omega. \tag{5}$$

De (5) découle enfin que, sur si S′ est déterminée par $\{V_\alpha, \theta_\alpha\}$ où $\{V_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de X muni des corepères distingués θ_α, $S = \mu^*S'$ est la G-structure sur X déterminée par $\{\mu^{-1}(V_\alpha), \mu^*\theta_\alpha\}$.

Lorsque μ est un homéomorphisme, les relations $S' = \mu.S$ et $S = \mu^*S'$ sont équivalentes et la remarque précédente permet de déterminer S'.

B) Soient X et X′ munis de G-structures S et S′ : un *isomorphisme de* S *sur* S′ est un homéomorphisme différentiable régulier μ de X sur X′ tel que $\mu S = S'$.

Un *automorphisme de* S est un isomorphisme de S sur elle-même.

Si U est un ouvert de X, H_U est un G-s.e.f.p. de E_U et définit la G-*structure* S_U *induite par* S *sur* U ($S_U = i^*S$, si i est l'application identique $U \to X$). *Un isomorphisme local de* S *sur* S′, de source U et de but V (U ouvert de X, V ouvert de X′) est un isomorphisme de S_U sur S'_V. Deux G-structures S *et* S′ *sont localement isomorphes* si, pour tout couple $x \in X$, $x' \in X'$, il existe un isomorphisme local de S sur S′ dont la source contient x et le but x'.

On définit de même un *automorphisme local de* S. L'ensemble $\Gamma(S)$ des automorphismes locaux de S constitue un *pseudogroupe de transformations de* X ([22]).

Rappelons enfin ([23]) que S est dite *localement homogène* si $\Gamma(S)$ opère transitivement sur X, *isotrope* si le prolongement $\tilde{\Gamma}$ de $\Gamma(S)$ opère transitivement sur chaque fibre H_x de H. Elle est donc localement homogène et isotrope si $\tilde{\Gamma}$ opère transitivement sur tout H : nous dirons par abus de langage que *S est transitive.*

Un *pseudogroupe de Lie transitif du premier ordre* peut être défini ([24]) comme le pseudogroupe $\Gamma(S)$ des automorphismes locaux d'une G-structure réelle transitive — ou, plus restrictivement ([25]) comme le pseudogroupe $\Gamma \subset \Gamma(S)$ des automorphismes locaux *analytiques* d'une G-structure réelle S elle-même analytique. Nous adopterons plutôt la première définition, étant entendu que certaines réciproques ne sont acquises que lorsque les données sont analytiques.

([22]) Pour la définition d'un pseudogroupe de transformations, voir C. Ehresmann ou S. S. Chern [9].

([23]) P. Libermann [19].

([24]) Y. Matsushima [24].

([25]) C. Ehreshmann [14] et P. Libermann [19].

C) *G-structures transitives.*

PROPOSITION IV, 1, 1 : *Une G-structure complexe transitive est équivalente au réel.*

Soit $\tilde{f}$ le prolongement d'un homéomorphisme local différentiable et régulier f de X. Si $z = z_1 . l$, $z_1 \in E$ $l \in CL_m$, alors $\tilde{f}(z) = \tilde{f}(z_1) . l$ où $\tilde{f}(z_1) \in E$: c'est-à-dire que, si $z \in E . l$, $\tilde{f}(z) \in E . l$. Soient S transitive, $z_0 \in H$ fixé et $z \in H$ arbitraire : il existe $f \in \Gamma(S)$ tel que $\tilde{f}(z_0) = z$ donc si $z_0 \in E.l$, $z \in E . l$ et $H \subset E . l$. Ceci équivaut à $H . l^{-1} \subset E$ et établit la proposition.

Or, soient S′ équivalente à S ($H' = H . l$) et $\mu \in \Gamma(S)$; $\tilde{\mu}(H_U) = H_V$ et $H'_U = H_U . l$ entraînent

$$\tilde{\mu}(H'_U) = \tilde{\mu}(H_U) . l = H_V . l = H'_V$$

c'est-à-dire $\mu \in \Gamma(S')$. Donc

PROPOSITION IV, 1, 2. — *Deux structures équivalentes admettent les mêmes automorphismes, elles sont en particulier, simultanément transitives.*

On pourra dire qu'une $\mathcal{C}$-structure $\mathcal{S}$ est transitive si une G-structure $S \in \mathcal{S}$ ($G \in \mathcal{C}$) est transitive, cette propriété étant indépendante du représentant S choisi.

Il découle de la proposition (IV, 1, 1) que les automorphismes d'une G-structure complexe transitive sont ceux d'une G-structure réelle. De ce point de vue l'introduction des G-structures complexes n'apporte rien de nouveau et, dans la suite, une G-structure transitive pourra toujours être supposée réelle.

La proposition (IV, 1, 2) admet les réciproques partielles suivantes :

THÉORÈME IV, 1 ([26]). — *Soient une* G-*structure* S *et une* G′-*structure* S′ *admettant les mêmes automorphismes locaux: a) si* S *est transitive, elle est subordonnée à* S′ *au sens large et par conséquent* G *est conjugué d'un sous-groupe de* G′; *b) si de plus* S′ *est aussi transitive, alors* S′ *et* S *sont équivalentes*; *c) si* $G' = G$, S′ *est associée à* S.

En effet : *a*) Soient $z, z_1 \in H$ (espace des repères distingués de S); il existe $\varphi \in \Gamma(S)$ tel que $\tilde{\varphi}(z) = z_1$ et $l \in CL_m$ tel que

([26]) D. Bernard [4].

$z' = z.l \in H'$. Comme $\varphi \in \Gamma(S')$, $\tilde{\varphi}(z') = \tilde{\varphi}(z).l = z_1.l \in H'$: Ainsi, quel que soit $z_1 \in H$, $z_1.l \in H'$, c'est-à-dire

$$(6) \qquad H' \supset H.l$$

S est subordonnée à S′ au sens large et ceci implique $G' \supset l^{-1}.G.l$.

b) Si S′ est aussi transitive on déduit de *a*) $H \supset H'.l^{-1}$ qui rapproché de (6) fournit $H' = H.l$ et $G' = l^{-1}.G.l$.

c) Si $G' = G$ sans supposer S′ transitive, (6) implique $G \supset l^{-1}.G.l$ d'où $l \in N(G)$ et S′ est associée à H.

Ce théorème montre en particulier que, si Γ est un pseudogroupe de Lie du premier ordre, toutes les G-structures à l'aide desquelles il peut être défini sont équivalentes, où encore, *les pseudogroupes de Lie du premier ordre correspondent biunivoquement aux* $\mathcal{C}$-structures transitives.

2. — Propriétés relatives au tenseur de structure.

A) Soient S(G, H) une G-structure sur X, μ une application régulière de X′ dans X et $S' = S'(G, H')$ l'image réciproque de S par μ. Notons encore $\tilde{\mu}$ la restriction de $\tilde{\mu}$ à H′ : c'est une G-représentation de H′ dans H et si π est une forme de connexion sur H, $\tilde{\mu}^*\pi = \pi'$ est (ch. II, § 4) une forme de connexion sur H′. Soient ω et ω' les formes fondamentales de H et H′; avec des notations qui sont claires

$$\Sigma = d\omega + \pi.\omega$$
$$\Sigma' = d\omega' + \pi'.\omega' = d(\tilde{\mu}^*\omega) + (\tilde{\mu}^*\pi).(\tilde{\mu}^*\omega)$$

d'après ((4); § 1) soit

$$(1) \qquad \Sigma' = \tilde{\mu}^*\Sigma.$$

En passant aux tenseurs associés (1) devient

$$(t\Sigma').\overset{2}{\wedge}\,\omega' = \tilde{\mu}^*\big((t\Sigma).\overset{2}{\wedge}\,\omega\big)$$

soit

$$(t\Sigma').\overset{2}{\wedge}\,\omega' = (\tilde{\mu}^*t\Sigma).\overset{2}{\wedge}\,\tilde{\mu}^*\omega = (\tilde{\mu}^*t\Sigma).\overset{2}{\wedge}\,\omega'$$

ce qui équivaut à

$$(2) \qquad t\Sigma' = \tilde{\mu}^*t\Sigma.$$

Enfin, α étant (ch. III, § 6) la projection de P sur M,

$$t_{S'} = \alpha . t\Sigma' = \alpha . \tilde{\mu}^* t\Sigma = \tilde{\mu}^*(\alpha . t\Sigma) = \tilde{\mu}^* t_S.$$

Proposition IV, 2, 1. — *Si* S′ *est l'image réciproque de* S *par* μ, *son tenseur de structure* $t_{S'}$, *est l'image réciproque de* t_S *par* $\tilde{\mu}$:

$$t_{\mu^* S} = \tilde{\mu}^* t_S. \tag{3}$$

Si l'on applique cette proposition aux automorphismes locaux d'une G-structure S, on voit que si S est isotrope en x_0, t_S est constant sur H_{x_0}; *si* S *est transitive*, t_S *est constant sur* H.

Définition IV, 2, 1. — *Une* G-*structure* S *est dite* presque transitive, *si elle a un tenseur de structure constant* (27).

B) G-*structures presque transitives. Conditions de Cartan.* — S étant presque transitive la valeur constante t de t_S n'est pas quelconque dans M : en particulier, t_S étant un tenseur de type $\rho(G)$, t doit être invariant par $\rho(G)$.

Exemple. — Soit S une π-structure avec les notations de (ch. III, § 7, C) on a

$$(\rho(g)t)^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1'} = g^{\alpha_1}_{\alpha} t^{\alpha}_{\beta'\gamma'} (g^{-1})^{\beta'}_{\beta_1} (g^{-1})^{\gamma'}_{\gamma_1} \quad g \in G.$$

Si l'on prend g tel que $g^{\alpha_1}_{\alpha} = \lambda \delta^{\alpha_1}_{\alpha}$, $g^{\alpha'_1}_{\alpha'} = \delta^{\alpha'_1}_{\alpha'}$, il vient $(\rho(g)t)^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1'} = \lambda t^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1'}$. La condition $\rho(g)t = t$ exige donc $\lambda t^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1'} = t^{\alpha_1}_{\beta_1\gamma_1'}$, quel que soit λ d'où $t = 0$: *une π-structure presque transitive est nécessairement presque intégrable* (*d'où intégrable*). Ce résultat s'applique en particulier aux structures presque complexes (cf. [9]).

Cette dernière condition n'est pas encore suffisante : des conditions nécessaires — et dans certains cas suffisantes — pour que $t \in M$ soit la valeur du tenseur de structure d'une G-structure presque transitive ont été déterminées par E. Cartan ([6] et [7]). Nous allons les rappeler brièvement puis les interpréter.

Soit W_1 un supplémentaire de V : les c^i_{jk}, composantes dans la base de P de la projection naturelle $c = q\ (t_S)$ de t_S sur W_1 (ch. III, § 6, D) sont ici constantes. Nous avons vu qu'il existe

(27) Ces structures sont appelées intégrables par S. S. Chern [9] ou Y. Matsushima [24], ainsi que par l'auteur dans [2] et [5].

des formes π'^{ρ} sur H satisfaisant aux équations de structure ((15) ch. III, § 6) soit

$$(4) \qquad d\omega^i = a^i_{j\rho}\omega^j \wedge \pi'^{\rho} + \frac{1}{2} c^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Les formes π'^{ρ} constituent avec les ω^i une base de θ^*_z en tout point $z \in \mathrm{H}$; on a donc :

$$(5) \quad d\pi'^{\rho} = \frac{1}{2}\gamma^{\rho}_{\sigma\tau}\pi'^{\rho} \wedge \pi'^{\tau} + u^{\rho}_{\sigma i}\pi^{\sigma} \wedge \omega^i + \frac{1}{2}\nu^{\rho}_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$$

où $\gamma^{\rho}_{\sigma\tau} = -\gamma^{\rho}_{\tau\sigma}$, $u^{\rho}_{\sigma i}$, $\nu^{\rho}_{ij} = -\nu^{\rho}_{ji}$ sont des fonctions sur H. Par différentiation extérieure de (4), $d\,(d\omega^i) = 0$ donne

$$(6) \qquad a^i_{j\tau}a^j_{l\sigma} - a^i_{j\sigma}a^j_{l\tau} = \gamma^{\rho}_{\sigma\tau}a^i_{l\rho}$$

$$(\mathrm{C}_1) \qquad a^i_{j\rho}c^j_{lm} + a^j_{l\rho}c^i_{mj} + a^j_{m\rho}c^i_{jl} = a^i_{m\sigma}u^{\sigma}_{\rho l} - a^i_{l\sigma}u^{\sigma}_{\rho m}$$

$$(\mathrm{C}_2) \qquad c^i_{pk}c^p_{lm} + c^i_{pl}c^p_{mk} + c^i_{pm}c^p_{kl} = a^i_{k\rho}\nu^{\rho}_{lm} + a^i_{l\rho}\nu^{\rho}_{mk} + a^i_{m\rho}\nu^{\rho}_{kl}.$$

La relation (6) n'étant autre que $[\varepsilon_\tau, \varepsilon_\sigma] = \gamma^{\rho}_{\sigma\tau}\varepsilon_\rho$, ces premières équations sont toujours compatibles, les $\gamma^{\rho}_{\sigma\tau}$ étant les constantes de structure du groupe de Lie G dans la base $\{\varepsilon_\rho\}$.

Définition IV, 2, 2. — *Nous dirons que* $t \in \mathrm{M}$ *satisfait aux* conditions de Cartan *relativement au groupe* G, *si, pour une base* $\varepsilon_\rho = (a^i_{j\rho})$ *de* $\underline{\mathrm{G}}$ *les relations* (C_1) *et* (C_2) *sont compatibles, les* c^i_{jk} *étant les composantes de* $c = q(t)$.

Il est évident que la compatibilité de (C_1) et (C_2) ne dépend pas de la base $\{\varepsilon_\rho\}$.

Une condition nécessaire pour que t soit le tenseur de structure d'une structure presque transitive, nous l'avons vu, est $\rho(\mathrm{G})t = t$ d'où, si $\lambda \in \underline{\mathrm{G}}$, $\tilde{\rho}(\lambda)t = 0$; soit, comme $t = \alpha.c$

$$(7) \qquad \tilde{\rho}(\lambda)\alpha.c = 0 \qquad \lambda \in \underline{\mathrm{G}}.$$

Comme $\alpha \circ \mathfrak{R}(g) = \rho(g) \circ \alpha (g \in \mathrm{G})$ on a aussi $\alpha \circ \tilde{\mathfrak{R}}(\lambda) = \tilde{\rho}(\lambda) \circ \alpha$ et (7) équivaut à $\alpha\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda)c = 0$ c'est-à-dire $\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda)c \in \mathrm{V}$. Comme $\mathrm{V} = \mathrm{A}(\mathrm{N})$ cette condition s'exprime ainsi : il existe $\xi \in \mathrm{N}$ tel que

$$(8) \qquad \tilde{\mathfrak{R}}(\lambda)c = \mathrm{A}(\xi).$$

Or, $(\tilde{\mathfrak{R}}(\lambda)c)^i_{lm} = \lambda^i_j.c^j_{lm} - c^i_{jm}\lambda^j_l - c^i_{lj}\lambda^j_m = \lambda^i_jc^j_{lm} + \lambda^j_lc^i_{mj} + \lambda^j_mc^i_{jl}$ et (8) s'écrit :

$$(9) \qquad \lambda^i_jc^j_{lm} + \lambda^j_lc^i_{mj} + \lambda^j_mc^i_{jl} = a^i_{m\rho}\xi^{\rho}_l - a^i_{l\rho}\xi^{\rho}_m$$

de sorte que les équations (C_1) ne sont autres que cette condition (9) appliquée à tous les éléments ε_ρ de la base de $\underline{G}$: (C_1) exprime donc que $\tilde{\rho}(\lambda)t = 0$ pour tout $\lambda \in \underline{G}$. Cette interprétation n'est pas essentiellement différente de celle donnée par E. Cartan dans [6], § 36 mais elle s'exprime plus simplement grâce à la notion de tenseur de structure.

Soit maintenant Ω la courbure d'une S-connexion. C'est une 2-forme tensorielle à valeur dans $\underline{G}$, et si $R = t\Omega$ est son tenseur associé à valeur dans $\underline{G} \otimes \overset{2}{\wedge} R_m^*$, on a

$$\Omega = R \,.\overset{2}{\wedge}\, \omega.$$

Les composantes Ω^ρ de Ω dans $\{\varepsilon^\rho\}$ sont donc

$$\Omega^\rho = \frac{1}{2} R^\rho_{lm} \omega^l \wedge \omega^m$$

(R^ρ_{lm} composantes de R) et l'on en déduit, puisque $\Omega = \varepsilon_\rho \otimes \Omega^\rho$, les composantes de Ω dans la base canonique de $\underline{L_m}$:

$$(10) \qquad \Omega^i_j = a^i_{j\rho}\Omega^\rho = \frac{1}{2} a^i_{j\rho} R^\rho_{lm} \omega^l \wedge \omega^m.$$

Soit toujours S une G-structure transitive, plaçons-nous dans le cas où W_1 est invariant par $\mathcal{R}(G)$ de sorte qu'il existe (th. III, 6, 2) une S-connexion γ telle que $t_\Sigma = t_S$ (= constante). Dans cette connexion cherchons la forme explicite de l'identité de Bianchi

$$(11) \qquad \nabla\Sigma = \Omega \,.\, \omega.$$

Les deux membres de (11) sont des 3-formes tensorielles dont il s'agit de calculer les tenseurs associés.

Pour le second membre il vient

$$(\Omega \,.\, \omega)^i = \Omega^i_k \wedge \omega^k = \frac{1}{2} a^i_{k\rho} R^\rho_{lm} \omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega^k$$
$$= \frac{1}{3\,!} (a^i_{k\rho} R^\rho_{lm} + a^i_{l\rho} R^\rho_{mk} + a^i_{m\rho} R^\rho_{kl}) \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m$$

soit

$$(12) \qquad (t(\Omega \,.\, \omega))^i_{klm} = a^i_{k\rho} R^\rho_{lm} + a^i_{l\rho} R^\rho_{mk} + a^i_{m\rho} R^\rho_{kl}.$$

Pour le premier membre, $t\nabla\Sigma$ est donné par la proposition

(III), 5). Toutefois, la formule (21) se simplifie puisque, $t\Sigma$ étant constant, $D\Sigma = t\nabla t\Sigma = 0$. Les composantes de $t\Sigma = t_S$ étant toujours notées c^i_{jk}, on a aussi $c^i_{jk} = -2S^i_{jk}$, et la formule (21) donne

$$(t\nabla\Sigma)^i_{klm} = c^i_{jk}c^j_{lm} + c^i_{jl}c^j_{mk} + c^i_{jm}c^j_{kl} \tag{13}$$

de sorte que l'identité de Bianchi (11) s'écrit

$$c^i_{jk}c^j_{lm} + c^i_{jl}c^j_{mk} + c^i_{jm}c^j_{kl} = a^i_{k\rho}R^\rho_{lm} + a^i_{l\rho}R^\rho_{mk} + a^i_{m\rho}R^\rho_{kl}$$

ce qui montre que les équations (C_2) sont nécessairement compatibles en V^ρ_{lm} et admettent la solution $V^\rho_{lm} = R^\rho_{lm}$. Nous énoncerons.

Proposition IV, 2, 2. — *La condition de Cartan* (C_1) *exprime l'invariance de* t *par* $\tilde{\rho}(\underline{G})$ *et peut s'écrire* $\tilde{\rho}(\varepsilon_\rho).t = 0$. *La condition* (C_2), *dans les hypothèses du théorème* (III, 6, 2), *est la simple traduction en termes de tenseurs associés de l'identité de Bianchi.*

3. — G-Structures analytiques involutives [28].

A) Soient S(G, H) une G-structure analytique presque transitive et μ un automorphisme local de S, de source U et de but V, U étant restreint de façon à être muni de sections locales. $\tilde{\mu}$ désignant le prolongement de μ à H, ω_U et ω_V les restrictions de ω à H_U et H_V, on a d'après ((5), § 1) $\tilde{\mu}^*\omega_V = \omega_U$. Soit σ une section $U \rightarrow H_U$ et f l'application $U \rightarrow H_U \times H_V$: $x \rightarrow (\sigma(x), \tilde{\mu}(\sigma(x)))$. Alors

$$f^*(\omega_U - \omega_V) = \sigma^*\omega_U - \sigma^*\tilde{\mu}^*\omega_V = \sigma^*(\omega_U - \tilde{\mu}^*\omega_V) = 0$$

f définit donc une variété intégrale du système de Pfaff

$$(1) \quad \omega_U = \omega_V \qquad \text{ou} \qquad \omega^i_U = \omega^i_V \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

variété intégrale à m dimensions « n'introduisant aucune relation entre les ω^i_U » (ou « à variables indépendantes x^i » coordonnées locales de x).

Inversement une telle variété intégrale s'identifie à une

[28] Nous ne rappellerons pas la théorie des systèmes différentiels en involution renvoyant le lecteur à [6], [8] et [9].

application $f: \mathrm{U} \rightarrow \mathrm{H_U} \times \mathrm{H_V}$, $x \rightarrow (\sigma(x), g(x))$ telle que $f^*(\omega_{\mathrm{U}} - \omega_{\mathrm{V}}) = 0$; celle-ci définit elle-même une application $\mu: \mathrm{U} \rightarrow \mathrm{V}$, $\mu = p \circ g$ dont on vérifie facilement que c'est un automorphisme local de S.

Le système (1) se ferme en ajoutant les équations

$$d\omega_{\mathrm{U}}^i = d\omega_{\mathrm{V}}^i$$

soit, d'après (15) (ch. III, § 6) et l'hypothèse de presque transitivité

$$a_{j\rho}^i \omega_{\mathrm{U}}^j \wedge \pi_{\mathrm{U}}'^{\rho} + \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega_{\mathrm{U}}^j \wedge \omega_{\mathrm{U}}^k = a_{j\rho}^i \omega_{\mathrm{V}}^j \wedge \pi_{\mathrm{V}}'^{\rho} + \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega_{\mathrm{V}}^j \wedge \omega_{\mathrm{V}}^k$$

équations qui, compte tenu de (1) s'écrivent

$$a_{j\rho}^i \omega_{\mathrm{U}}^j \wedge (\pi_{\mathrm{V}}'^{\rho} - \pi_{\mathrm{U}}'^{\rho}) = 0. \tag{2}$$

Les critères d'involution montrent que l'involution du système fermé (1), (2) par rapport aux variables indépendantes $x^1, \dots x^m$ ne dépend que des coefficients $a_{j\rho}^i$ — et même qu'elle ne dépend que de $\underline{\mathrm{G}}$ et non du choix particulier de la base $\varepsilon_\rho = (a_{j\rho}^i)$: lorsque ces conditions sont réalisées, G *est dit involutif*. Une G-*structure* S est *involutive* si G est involutif.

On peut alors donner du 3ᵉ théorème fondamental de E. Cartan l'énoncé suivant :

Proposition IV, 3, 1 (E. Cartan). — *Si* G *est involutif, les conditions de Cartan sont suffisantes pour qu'il existe une* G-*structure analytique presque transitive de tenseur de structure t.*

On peut d'ailleurs voir sur les critères que, si G est involutif, ses conjugués dans L_m le sont aussi de sorte que l'on peut parler de $\mathcal{C}$-*structures involutives* — où de *pseudogroupes de Lie involutifs.*

B) Lemme IV, 3. — G *étant involutif, si* S *et* S' *sont deux* G-*structures analytiques presque intégrables telles que* $t_{\mathrm{S}} = t_{\mathrm{S'}}$, *il existe un isomorphisme local de* S *sur* S' *appliquant un repère distingué arbitraire z de* S *sur un repère distingué arbitraire z' de* S'. *En particulier, ces structures sont localement isomorphes.*

En effet, en gardant les notations de A, la détermination d'un tel isomorphisme local μ, revient à celle d'une variété intégrale « de dimension m à variables indépendantes x^i » du système fermé (1), (2) passant par le couple (z, z'). Ce système étant en involution par rapport aux x^i, comme il n'a pas d'équations finies, tout couple $(z, z') \in H_U \times H'_V$ est un point intégral — et comme le système des formes $\omega^i_U - \omega'^i_U$ est partout de rang m, c'est un point intégral régulier : et ceci suffit à affirmer l'existence de notre variété intégrale. On en déduit :

THÉORÈME IV, 3 ([29]). — *Si* G *est involutif, une* G*-structure analytique* S *presque transitive est transitive, presque intégrable est intégrable.*

La première affirmation est une conséquence immédiate du lemme. Soit d'autre part S presque intégrable. Sur R^m la G-structure S' définie par le s.e.f.p. $H' = \{R_y . G\}$, $y \in R^m$ où R_y est le repère naturel en y des coordonnées canoniques y^i, est intégrable et analytique. Comme $t_{S'} = t_S = 0$, le lemme montre que, pour tout $x \in X$, il existe un isomorphisme local $f : U \subset X \rightarrow V \subset R^m$, où $x \in U$. Alors, le corepère $dy = \{dy^i\}$ étant distingué pour S', le corepère $\theta = f^*dy$ est distingué pour S. Ses composantes sont $\theta^i = f^*dy^i = d(f^*y^i) = dz^i$. f étant un homéomorphisme différentiable régulier, les fonctions $z^i = f^*y^i$ sont des coordonnées locales sur U : θ est donc un corepère naturel de coordonnées locales distingué pour S, qui est donc intégrable.

Tous les cas d'intégrabilité de G-structures analytiques presque intégrables rencontrées jusqu'ici rentrent dans l'application de ce théorème, leur groupe étant involutif : structures presque produit, presque complexes, exemple F) ch. III, § 8, structures presque symplectiques ([30]).

C) *Pseudogroupes de Lie localement semblables* ([31]). — Soit L le sous-espace des $t \in M$ qui satisfont aux conditions de Cartan pour un certain groupe $G \subset L_m$. Si S est presque transitive, d'après la formule ((1) ch. III, § 7) il en est de même des structures équivalentes : c'est une propriété de la $\mathcal{C}$-structure $\mathcal{S}$. En particulier, toutes les G-structures S' associées à S sont presque transitives et leurs tenseurs de structure $t_{S'} \in L$ appartiennent à une même classe d'intransitivité de M pour le groupe $G^* = \bar{\rho}(N(G))$ (ch. III, § 7, A).

([29]) D. Bernard [2] et [5].
([30]) $G = Sp(m, R)$. Cf. P. Libermann [19].
([31]) Résultats de [2] à la présentation près.

Réciproquement soient, $S(G, H)$ et $S'(G, H')$ des structures presque transitives sur X et X' telles que $t_{S'} = t_S$ modulo G^*. Soit $n \in N(G)$ tel que $t_{S'} = \bar{\rho}(n^{-1})\, t_S$; $S''(G, H'')$ étant définie par $H'' = H.n$ on a $t_{S''} = \bar{\rho}(n^{-1})\, t_S = t_{S'}$, et, si l'on suppose G involutif S'' est, d'après le lemme (IV, 3), localement isomorphe à S'. On peut donc dire que la condition $t_{S'} = t_S$ modulo G^* est nécessaire et suffisante pour que S soit équivalente à une structure localement isomorphe à S' : toutefois le résultat est plus clair si on l'exprime à l'aide des pseudogroupes $\Gamma(S')$ et $\Gamma(S) = \Gamma(S'')$.

Soient en effet, f: $U \to V$ un isomorphisme local de S'' sur S'. Γ_U (resp. Γ'_V) la restriction à U de $\Gamma(S)$ (resp. à V de $\Gamma(S')$). Si $g \in \Gamma_U$, sa transmuée $\varphi = f \circ g \circ f^{-1}$ étant un produit d'isomorphisme locaux de G-structures ($S' \to S'' \to S'' \to S'$) est un automorphisme local de S' : $\varphi \in \Gamma'_V$. On en déduit $\Gamma'_V = f \circ \Gamma_U \circ f^{-1}$. Nous dirons, par analogie avec les groupes de transformations que Γ_U et Γ'_V *sont semblables* et que :

Définition IV, 3. — *Deux pseudogroupes de transformations, Γ sur X, Γ' sur X' sont localement semblables si pour tout couple $x \in X$, $x' \in X'$ il existe un voisinage U de x et un voisinage V de x' tels que les restrictions Γ_U et Γ'_V soient semblables.*

S'' et S' étant localement isomorphes, on voit que $\Gamma(S)$ et $\Gamma(S')$ sont localement semblables. $t_S = t_{S'}$, modulo G^* entraîne donc : « $\Gamma(S)$ localement semblable à $\Gamma(S')$ ».

Réciproquement soient S et S' deux G-structures presque transitives telles que $\Gamma(S)$ et $\Gamma(S')$ soient localement semblables. f: $U \to V$ réalisant la similitude de Γ_U et Γ'_V, la G-structure sur U, $f^*S'_V$ admet les mêmes automorphismes locaux que S_U : elle lui est donc associée (th. IV, 1). On en déduit $t_{S'} = t_S$ modulo G^*. Si l'on appelle t_S (ou les composantes c^i_{jk} de $c = q(t_S)$) un « système de constantes de structure de $\Gamma(S)''$ » (E. Cartan). Puis la classe d'intransitivité de t_S modulo G^* la « famille des systèmes de constantes de structure de $\Gamma(S)''$ » (Matsushima [24]) ou plus simplement la *famille caractéristique* de $\Gamma(S)$ on peut énoncer

Théorème IV, 3. — *Pour que deux pseudogroupes de Lie du premier ordre transitifs et involutifs soient localement semblables, il faut et suffit qu'ils aient même famille caractéristique.*

De ce théorème, du théorème (IV, 1) et de la proposition (IV, 3, 1) on déduit :

Corollaire. — *Les pseudogroupes de Lie du premier ordre, transitifs et involutifs, correspondent biunivoquement aux couples d'une classe de groupes linéaires involutifs conjugués et, un représentant* G *étant choisi dans chaque classe, d'une classe d'intransitivité de* L *par* G^* :

Exemple. — $m = 3$ et G groupe indiqué à l'alinéa F, ch. III, § 8. Nous avons vu que l'on peut choisir le supplémentaire W de V de façon que $c = q(t_S)$ ait pour composantes $\lambda^i = c^i_{23}$ $(i = 1, 2, 3)$ et $c^i_{12} = c^i_{13} = 0$. C'est-à-dire que les équations de structure sont

$$d\omega^i = \pi^i \wedge \omega^1 + \lambda^i \omega^2 \wedge \omega^3.$$

Les conditions de Cartan sont $\lambda^1 = 0$. L est donc un sous-espace de dimension 2 de W de coordonnées λ^2, λ^3. N(G) est le groupe des matrices

$$n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \quad (\det . n \neq 0)$$

et $\rho(n)$ opère sur L par

$$(3) \quad (\lambda^2, \lambda^3) \to \left(\lambda'^2 = \frac{\beta'\lambda^2 + \beta''\lambda^3}{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}, \quad \lambda'^3 = \frac{\gamma'\lambda^2 + \gamma''\lambda^3}{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''}\right).$$

Les formules (3) définissent le groupe G^*. Il n'a que 2 classes d'intransitivité de représentants $c_0 = (0, 0)$ et $c_1 = (1, O)$.

A c_0 correspondent les pseudogroupes de Lie localement semblables au pseudogroupe opérant dans R^3 d'équations finies

$$X = f(x), \qquad Y = g(x) + y, \qquad Z = h(x) + z$$

(f, g, h fonctions analytiques arbitraires).

A c_1 correspondent les pseudogroupes localement semblables au pseudogroupe défini dans le demi espace $y > 0$ de R^3, d'équations finies

$$X = f(x), \qquad Y = g(x) . y, \qquad Z = g(x) . z + h(x).$$

4. — Automorphismes infinitésimaux.

A) *Dérivées de Lie.* — Soit η un champ de vecteurs, ou transformation infinitésimale (*t. i.*) sur X. Le groupe local à un paramètre de transformations qu'il détermine sera noté exp. $(t\eta)$ ([32]) et la dérivation de Lie par rapport à η, $\mathfrak{L}(\eta)$.

Φ (resp. φ) étant une forme sur X à valeurs dans $\mathfrak{L}(M, P)$ (resp. M) (ch. II, § 2), comme $\mathfrak{L}(\eta)$ est une dérivation de degré zéro sur les formes scalaires, on voit immédiatement

$$(1) \qquad \mathfrak{L}(\eta)(\Phi.\varphi) = (\mathfrak{L}(\eta)\Phi).\varphi + \Phi.(\mathfrak{L}(\eta)\varphi).$$

De même qu'une transformation μ de X à un prolongement $\tilde{\mu}$ à E(X) (cf. § 1), de même, une *t.i.* η sur X à un prolongement $\tilde{\eta}$ à E(X); il peut être défini par

$$\exp.(t\tilde{\eta}) = \widetilde{(\exp(t\eta))}$$

et satisfait par conséquent à

$$(2) \qquad p \circ \exp(t\tilde{\eta}) = \exp(t\eta) \circ p$$

d'où

$$(3) \qquad \mathfrak{L}(\tilde{\eta}) \circ p^* = p^* \circ \mathfrak{L}(\eta).$$

Si Φ est une forme tensorielle sur E(X), la forme $\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\Phi$ est appelé « dérivée de Lie de Φ par rapport à η » et souvent notée $\mathfrak{L}(\eta)\Phi$: nous éviterons d'employer cette notation. Soit θ_U un corepère sur $U \subset X$: c'est une 1-forme sur U à valeurs dans R^m. $\mathfrak{L}(\eta)\theta_U$ est donc aussi une 1-forme à valeurs dans R^m de sorte que, si z_U est le repère dual de θ_U, $(\mathfrak{L}(\eta)\theta_U)_x \circ z_U(x)$ est un endomorphisme $a_U(x)$ de R^m et

$$(\mathfrak{L}(\eta)\theta_U)_x = a_U(x).z_U^{-1}(x)$$

c'est-à-dire qu'il existe une fonction a_U, $U \to \underline{L_m}$, telle que

$$(4) \qquad \mathfrak{L}(\eta)\theta_U = a_U.\theta_U.$$

Réciproquement, la fonction locale a_U détermine le transformé du corepère θ_U par une transformation finie du groupe à un paramètre engendré par η :

$$(5) \qquad (\exp(t\eta)^*\theta_U)_x = \left(\exp\int_0^t a_U[x(\tau)]d\tau\right).(\theta_U)_x$$

([32]) Dans tout ce paragraphe, les notations qui ne sont pas totalement explicitées ici, se trouvent définies dans A. Lichnerowicz [23].

où $x(\tau) = \exp(\tau\eta).x$ et où, au second membre, exp désigne la représentation exponentielle $\overline{L}_m \to L_m$.

Soit g_U la fonction sur E_U à valeurs dans $L_m \subset \overline{L}_m$ définie par la carte locale associée à z_U : $z = z_U(pz).g_U(z)$ pour $z \in E_U$. Si g_U^{-1}, est la fonction $z \to (g_U(z)^{-1})$, on a donc dans E_U la représentation suivante de la forme fondamentale θ de E(X) :

$$\theta = g_U^{-1}.p^*\theta_U \tag{6}$$

or de $\tilde{\mu}^*\theta = \theta$((4)§ 1) découle $\mathfrak{L}(\tilde{\mu})\theta = 0$ et,
en appliquant (1) (3) et (4), la dérivation de Lie de (6) donne

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\theta = [\mathfrak{L}(\tilde{\eta})g_U^{-1} + g_U^{-1}(p^*a_U)]p^*\theta_U$$

d'où

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})g_U^{-1} = - g_U^{-1}.(p^*a_u) \tag{7}$$

et

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})g_u = (p^*a_U).g_U. \tag{8}$$

Soit alors Φ une forme tensorielle sur E(X) à valeurs dans un espace vectoriel M et de type $\mathfrak{R}(L_m)$. On a dans E_U une représentation locale de Φ analogue à (6) :

$$\Phi = \mathfrak{R}(g_U^{-1}).p^*\Phi_U \quad \text{où} \quad \Phi_U = z_U^*\Phi. \tag{9}$$

Par un calcul simple on déduit de (7)

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})(g_U^{-1}) = -\mathfrak{R}(g_U^{-1}).\tilde{\mathfrak{R}}(p^*a_U) \tag{10}$$

puis de (9)

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\Phi = \mathfrak{R}(g_U^{-1}).p^*[\mathfrak{L}(\eta)\Phi_U - \tilde{\mathfrak{R}}(a_U).\Phi_U] \tag{11}$$

soit

$$(\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\Phi)_U = \mathfrak{L}(\eta)\Phi_U - \tilde{\mathfrak{R}}(a_U).\Phi_U. \tag{12}$$

Enfin, si π est une forme de connexion sur E, on a localement dans E_U

$$\pi = (\text{adj } g_U^{-1}).p^*\pi_U + g_U^{-1}.dg_U \tag{13}$$

d'où l'on déduit par un calcul faisant intervenir seulement les formules déjà établies

$$\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\pi = (\text{adj } g_U^{-1}).p^*[\mathfrak{L}(\eta)\pi_U + [\pi_U, a_U] + da_U] \tag{14}$$

où $\pi_U = z_U^* \pi$; ceci met en évidence le caractère tensoriel de $\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\pi$ et peut s'écrire

$$(15)\qquad (\mathfrak{L}(\tilde{\eta})\pi)_U = \mathfrak{L}(\eta)\pi_U + [\pi_U, a_U] + da_U.$$

B) *Automorphismes infinitésimaux* (*a. i*) *d'une* G-*structure* S. Une *t.i.* de X est un *a.i.* de S si exp $(t\eta)$ est un automorphisme de S pour tout t pour lequel il est défini. Si ω_U est un corepère distingué de S sur U, la fonction a_U à valeurs dans $\underline{L_m}$ définie par (4) telle que $\mathfrak{L}(\eta)\omega_U = a_U\omega_U$ prend ses valeurs dans $\underline{G}$. Réciproquement d'après (5), si a_U est à valeurs dans $\underline{G}$, exp $(t\eta)^*\omega_U$ est un corepère distingué de S et η est un *a.i.*

Parmi les G-structures, nous avons considéré (ch. III, § 2) les « G-structures définies par un tenseur ». En reprenant les mêmes notations, nous allons établir :

Proposition IV, 4, 1. — *Si* S *est une* G-*structure définie par un tenseur t sur* E(X), *pour que* η *soit une a.i. de* S *il faut et suffit que* $\mathfrak{L}(\tilde{\eta})t = 0$.

En effet, d'après (12), on a dans un ouvert $V \subset X$ muni d'un corepère distingué ω_V de S, $(\mathfrak{L}(\tilde{\eta})t)_V = \mathfrak{L}(\eta)t_V - \tilde{\mathfrak{R}}(a_V)t_V$; ω_V étant un corepère distingué, $t_V = u$ est constant et $\mathfrak{L}(\eta)t_V = 0$. Pour que $\mathfrak{L}(\tilde{\eta})t = 0$ il faut et suffit donc que $\tilde{\mathfrak{R}}(a_V)u = 0$: or, pour cela, il faut et suffit que $a_V(x) \in \underline{G}$ c'est-à-dire que η soit un *a.i.* c.q.f.d. Ceci montre en particulier qu'il y a identité entre les isométries infinitésimales d'une structure riemanienne et les *a.i.* de la O(m)-structure qu'elle détermine.

Soit $\hat{G}$ le groupe des matrices $\lambda . g$ (λ réel > 0, $g \in G$) et $\hat{S}$ la $\hat{G}$-structure extension de S : un automorphisme (resp. *a.i.*) de $\hat{S}$ peut être appelé *transformation conforme* (resp. *transformation infinitésimale conforme* : *t.i.c.*) de S. En particulier, une transformation conforme μ est une « homothétie » s'il existe $\lambda \in R$ tel que, pour tout corepère distingué ω_U de S, $\frac{1}{\lambda}\mu^*\omega_U$ soit encore un corepère distingué de S. Pour que η soit une *homothétie infinitésimale*, c'est-à-dire que exp. $(t\eta)$ soit une homothétie quel que soit t, il faut que $a_U = k\mathrm{I} + \alpha_u$, $\alpha_u(x) \in \underline{G}$. Cela suffit d'après (5) car alors

$$\int_0^t a_u[x(\tau)]\,d\tau = kt\mathrm{I} + \int_0^t \alpha_u[x(\tau)]d\tau = kt\,\mathrm{I} + \beta_u(x, t) \quad \beta_u(x, t) \in \underline{G}$$

et $\exp.(kt\mathrm{I} + \beta_u(x, t)) = e^{kt}.\exp \beta_u(x, t)$ puisque $kt\mathrm{I}$ et $\beta_u(x, t)$ commutent. On a donc

$$(\exp(t\eta)^*\omega_U)_x = e^{kt}.\exp \beta_u(x, t)(\omega_U)_x \qquad \text{où} \qquad \exp \beta_U(x, t) \in G$$

c'est-à-dire que $e^{-kt}.(\exp(t\eta)^*\omega_U)$ est un corepère distingué et η une homothétie infinitésimale.

Les définitions données ici coïncident encore avec les notions usuelles dans le cas Riemannien.

Soit $S' = S.l$ une G'-structure équivalente à S. Si ω_U est un corepère distingué de S, $\omega'_U = l^{-1}.\omega_U$ est un corepère distingué de S'. Pour une *t.i.* η on a

$$\mathcal{L}(\eta)\omega'_U = l^{-1}.\mathcal{L}(\eta)\omega_U = l^{-1}.a_U.\omega_U = l^{-1}.a_U.l.\omega'_U.$$

Si $a_U \in \underline{G}$ (resp. $\underline{\hat{G}}$), $l^{-1}.a_U.l \in \underline{G}'$ (resp. $\underline{\hat{G}}'$) de sorte qu'il y a identité entre les *a.i.* (resp. *t.i.c.*) des structures S et S' : ce sont les *a.i.* (resp. *t.i.c.*) de la $\mathcal{C}$-structure déterminée par S et S'. Il en est de même pour les homothéties infinitésimales.

Si S' est une extension de S tout *a.i.* (resp. *t.i.c.*) de S est aussi un *a.i.* (resp. *t.i.c.*) de S' : la réciproque n'est évidemment pas vraie en général et conduit au problème

P_1 : S *étant subordonnée à* S', *dans quelles conditions peut-on affirmer qu'un a.i. de* S' *est aussi un a.i. de* S?

Si pour le groupe G, les G-structures S admettent une S-connexion canonique de forme π_S (c'est-à-dire telle que $\tilde{\mu}^*\pi_{S'} = \pi_S$ pour tout isomorphisme μ d'une G-structure S sur la G-structure S') un *a.i.* de S est une *t.i.* affine de π_S puisque $\exp(t\tilde{\eta})^*\pi_S = \pi_S$ entraîne $\mathcal{L}(\tilde{\eta})\pi_S = 0$. La réciproque, généralement fausse même lorsqu'il existe une S-connexion canonique, pose le problème

P_2 : γ *étant une* S-*connexion, quand une t.i. affine pour* γ *est-elle une a.i. de* S?

Ces deux problèmes bien connus dans le cas du groupe orthogonal et de certains de ses sous-groupes (cf. [23]) ont été étudiés avec des hypothèses assez générales par R. Hermann ([16] et [17]) : nous allons pour terminer reprendre la méthode d'Hermann et en déduire des résultats en général plus larges que les siens.

C) *Lemme d'Hermann.* — Soient les sous-groupes $G \subset G' \subset L_m$. Supposons G réductif dans G' et soit une décomposition en somme direct $G' = \underline{G} \oplus M$, où $adj.(G)M \subset M$. Soient S une

G-structure subordonnée à une G′-structure S′ et η un *a.i.* de S′. ω_U étant un corepère distingué de S, sa dérivée de Lie est $\mathcal{L}(\eta)\omega_U = a_U . \omega_U$. Décomposons a_U suivant

$$a_U = b_U + c_U, \qquad b_U(x) \in \underline{G}, \qquad c_U(x) \in M.$$

Proposition IV, 4, 2. — 1° *Les c_U définissent un tenseur* C *de type adjoint — c'est-à-dire un champ d'endomorphismes de l'espace tangent à* X *— dont la nullité est la condition nécessaire et suffisante pour que η soit un a.i. de* S; 2° *si de plus η est une t.i. affine d'une* S*-connexion γ,* C *est à dérivée covariante nulle dans γ.*

Le changement de corepère distingué de S étant défini dans $U \cap V$ par $\omega_V = M_{UV}\omega_U$ (M_{UV} fonction sur $H \cap V$ à valeurs dans G), la fonction a_U se transforme en

$$a_V = (ad\, M_{UV})\, a_U + i(\eta)\, (dM_{UV}(M_{UV})^{-1}) \text{ (33)}$$

d'où, en prenant les parties à valeurs dans M des deux membres

$$c_V = (ad\, M_{UV})\, c_U$$

ce qui démontre le premier résultat.

Si η est une *t.i.* affine de la S-connexion γ de forme π, en prenant la partie dans M des deux membres de la relation (15) il vient

$$[\pi_U, c_U] + dc_U = 0 \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad (\nabla C)_U = 0$$

ce qui établit le second résultat.

D) *Sur le problème* P_1 nous allons établir

Théorème IV, 4, 1 (34). — G *étant un sous-groupe de* $O(m)$ *et* S *une* G*-structure* presque intégrable *sur* X, *il y a identité entre les isométries infinitésimales de la structure riemannienne définie par* S *et les a.i. de* S *dans les cas suivants :*

1° X *est compacte*;

2° X *n'admet pas de 2-forme à dérivée covariante nulle — par exemple* X *est irréductible et n'admet pas de structure kählerienne*;

3° X *irréductible est kählerienne à courbure de Ricci différente de* 0;

(33) $i(\eta)\ \Phi$ désigne le produit intérieur de la forme Φ par le champ de vecteurs η.

(34) Le théorème 5 de [17] donne seulement ce résultat si X est compacte, le deuxième nombre de Betti étant nul.

4° X *complète admet, au moins en un point, une courbure de Ricci non dégénérée.*

G est réductif dans $O(m)$ pour la décomposition $\underline{O(m)} = \underline{G} + M$, où M est l'ortho-complément de $\underline{G}$ dans $\underline{O(m)}$ pour la métrique définie sur $\underline{O(m)}$ par $(\alpha^i_j).(\alpha'^k_l) = \sum_{i,j} \alpha^i_j \alpha'^i_j$. S presque intégrable admet une S-connexion γ à torsion nulle qui induit donc une connexion euclidienne à torsion nulle, c'est-à-dire la connexion riemannienne. Une isométrie infinitésimale η étant un *t.i.* affine pour la connexion riemannienne, c'est une *t.i.* affine pour γ et on peut lui appliquer le lemme.

ω_U étant un corepère distingué de S sur $U \subset X$, gardons les notations du lemme : il s'agit de montrer la nullité de C dans les différentes hypothèses. C tenseur de type adjoint à valeurs dans $M \subset \underline{O(m)}$ à des composantes C^i_j antisymétriques et $\alpha_{ij} = g_{ik} C^k_j$ sont les composantes d'une 2-forme α à dérivée covariante nulle (puisque $\nabla g = \nabla C = 0$). Ceci montre le théorème dans l'hypothèse 2°) (pour l'exemple voir A. Lichnérowicz [22], p. 266). Dans les hypothèses 3° où 4° toute 2-forme à dérivée covariante nulle détermine un élément de l'algèbre de Lie du groupe d'holonomie homogène (cf. A. Lichnérowicz [22] p. 250 et [23] p. 104) donc $C_U(x) \subset \underline{\sigma_{z_u(x)}} \subset \underline{G}$ puisque, $z_U(x)$ repère dual de $(\omega_U)_x$ est un repère distingué de S : et $C_U(x) \in \underline{G} \cap M$ entraîne $C = O$.

Plaçons-nous dans le cas compact et utilisons les notations abrégées suivantes : ω^i composantes de ω_U, π^i_j composantes de $\pi_U = z^*_U \pi$ (π forme de connexion de γ) a^i_j (resp. C^i_j) composantes de a_U (resp. C_U). π étant la connexion riemanienne, on a

$$\pi^i_j + \pi^j_i = 0 \tag{16}$$

$$d\omega^i + \pi^i_k \wedge \omega^k = 0, \tag{17}$$

or, $\mathcal{L}(\eta)\omega_U = a_U . \omega_U$ c'est-à-dire

$$di(\eta)\omega^i + i(\eta)\, d\omega^i = a^i_j \omega^j \tag{18}$$

mais $i(\eta)\omega^i = \eta^i$ sont les composantes de η dans la base $z_U(x)$ et (17) donne

$$i(\eta)\, d\omega^i + (i(\eta)\pi^i_k).\omega^k - \pi^i_k \eta^k = 0$$

(18) devient donc

$$a^i_j \omega^j = d\eta^i + \pi^i_k \eta^k - (i(\eta)\pi^i_j)\omega^j = (\nabla_j \eta^i - i(\eta)\pi^i_j)\omega^j \tag{19}$$

d'où l'on déduit

$$(20) \qquad a_j^i = \nabla_j \eta^i - i(\eta)\pi_j^i.$$

Tout d'abord le fait que η soit une isométrie infinitésimale équivaut à $a_U \in \underline{O(m)}$ donc à $a_j^i + a_i^j = 0$. Comme $(i(\eta)\pi_j^i) \in \underline{O(m)}$ on retrouve la condition nécessaire et suffisante pour que η soit une isométrie infinitésimale :

$$(21) \qquad \nabla_j \eta^i + \nabla_i \eta^j = 0.$$

D'autre part, γ étant une S-connexion et ω_U un corepère distingué pour S, $(i(\eta)\pi_j^i) \in \underline{G}$. On déduit donc de (20) avec des notations qui sont claires

$$(22) \qquad C_j^i = (a_j^i)_M = (\nabla_j \eta^i)_M.$$

Soit le champ de vecteurs $\xi = C.\eta$ de composantes dans $\dot{z}_U(x)$ $\xi^i = C_j^i \eta^j$; alors

$$\nabla_i \xi^i = c_j^i(\nabla_i \eta^j) \qquad \text{puisque} \qquad \nabla_k c_j^i = 0$$

et d'après (21)

$$\nabla_i \xi^i = -\sum_{i,j} c_j^i(\nabla_j \eta^i) = -\sum_{i,j} c_j^i(c_j^i + (\nabla_j \eta^i)_{\underline{G}})$$

soit, d'après l'orthogonalité de $\dot{M}$ et G

$$\nabla_i \xi^i = -\sum_{i,j}(c_j^i)^2 = -c^2.$$

Si X est orientable et si ν est l'élément de volume, il vient

$$0 = \int_X (\nabla_i \xi^i)\nu = -\int_X c^2 \nu \leqslant 0,$$

ce qui exige $C^2 = 0$ et $C = 0$. La proposition est alors démontrée. On se débarrasse de l'hypothèse X orientable en passant éventuellement au revêtement orientable de X muni des structures images réciproques.

On aurait aussi pu déduire notre théorème de l'étude du groupe de Kostant engendré par η (cf. A. Lichnérowicz [23]).

E) *Sur le problème* P_2.

Théorème IV, 4, . — G *étant réductif dans* L_m, *soit* X *munie d'une* G-*structures* S *et d'une* S-*connexion* γ *dont le groupe d'holonomie est irréductible dans le complexe. Alors toute t.i.*

affine pour γ *est une homothétie infinitésimale de* S. *De plus* η *est un a.i. de* S *dans les cas suivants:*

1° G *est invariant par homothétie* ($\hat{G} = G$);

2° X *est compacte,* G *unimodulaire et* γ *sans torsion* [35].

Le champ de tenseurs C étant à dérivée covariante nulle, l'opérateur C_x qu'il définit sur T_x appartient au centralisateur de ψ_x (groupe d'holonomie homogène) dans l'algèbre des endomorphismes de T_x (cf. [22], § 54). Soient $h \in \psi_x$ $(h.C_x = C_x.h)$ et $v \in T_x$ un vecteur propre de C_x pour la valeur propre k (réelle ou complexe), et E_k l'espace des vecteurs propres pour la valeur propre k. On a

$$C_x v = kv \qquad \text{et} \qquad C_x(hv) = hC_x v = hkv = khv$$

c'est-à-dire que $v \in E_k$ entraîne $hv \in E_k$; E_k est invariant par ψ_x et, par suite de l'irréductibilité, $E_k = T_x^C$; $C_x v = kv$ quel que soit $v \in T_x^C$ et $C_x = k(x).I(x)$. C étant à dérivée covariante nulle il vient $k(x) = k$ constante sur X et $C = k.I$. Alors $a_U = b_U + k.I$, $b_U \in \underline{G}$, c'est-à-dire que η est une homothétie infinitésimale.

Si de plus G est invariant par homothétie $(\hat{G} = G)$ $C = kI$ entraîne $C \in \underline{G}$ c'est-à-dire $C = 0$ et η est un *a.i.* Si enfin G est unimodulaire, $b_U \in \underline{G}$ entraîne $tr\, b_U = 0$ et par conséquent $tr\, a_U = tr\, C_U = mk$. La nullité de la torsion de γ entraîne par un calcul déjà fait (formule (20))

$$a_j^i = \nabla_j \eta^i - i(\eta)\, \pi_j^i$$

π étant une forme à valeurs dans $\underline{G}$, $tr\, \pi = \pi_i^i = 0$ et il vient $tr\, a_U = \nabla_i \eta^i$ c'est-à-dire

$$mk = \nabla_i \eta^i. \tag{23}$$

X est orientable puisque G est unimodulaire; si donc elle est compacte, ν étant l'élément de volume, l'intégration de (23) fournit

$$mk \int_X \nu = \int_X (\nabla_i \eta^i)\, \nu = 0$$

d'où $k = 0$; puis $C = 0$ de sorte que η est un *a.i.*, c.q.f.d.

[35] Ce dernier cas de notre théorème fait l'objet du théorème IV de [17] dans des hypothèses un peu différentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. ARAGNOL. Sur la Géométrie différentielle des espaces fibrés, *thèse*, Paris, 1958.

[2] D. BERNARD. Sur la structure des pseudogroupes de Lie, *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 239, 1954, pp. 1263-1265.

[3] D. BERNARD. Sur l'intersection des sous-espaces fibrés principaux d'un espace fibré principal, *Ibid.*, 243, 1956, pp. 1714-1716.

[4] D. BERNARD. Sur les G-structures complexes, *Ibid.*, 243, 1956, pp. 1821-1824.

[5] D. BERNARD. Définition globale du tenseur de structure d'une G-structure, *Ibid.*, 247, 1958, pp. 1546-1549.

[6] E. CARTAN. Sur la structure des Groupes infinis de transformation, *Ann. Sc. Ec. Norm.*, 21, 1904, pp. 153-206 et 22, 1905, pp. 219-308; ou Œuvres Complètes, Paris, 1953, II, pp. 571-714.

[7] E. CARTAN. La structure des Groupes infinis, Séminaire de Math., 4e An., 1936-37, exposé G. ou Œuvres Complètes, Paris, 1953, II, pp. 1335-1358.

[8] E. CARTAN. Les Systèmes Différentiels extérieurs, Paris, Hermann, 1945.

[9] S. S. CHERN. Géométrie différentielle, *Coll. Int. du C.N.R.S.*, Strasbourg 1953, pp. 119-135.

[10] S. S. CHERN. On a Generalization of Kähler Geometry, *A symposium in honour of S. Lefchetz*, *Princeton*, pp. 103-121.

[11] C. CHEVALLEY. Theory of Lie Groups, I, *Princeton*, 1946.

[12] C. EHRESMANN, Sur la Théorie des espaces fibrés, *Coll. Int. du C.N.R.S.*, *Top. Alg.*, Paris, 1947, pp. 3-35.

[13] C. EHRESMANN. Structures locales et structures infinitésimales, *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 254, 1951, pp. 587-589.

[14] C. EHRESMANN. Introduction à la théorie des Structures infinitésimales et des pseudogroupes de Lie. *Coll. Intern. du C.N.R.S.*, *Géom. Diff.*, Strasbourg, 1953, pp. 97-110.

[15] J. FRENKEL. Cohomologie non abélienne et espaces fibrés, *Thèse*, Paris, 1957, ou *Bull. Soc. Math.*, *France*, 85, 1957, pp. 135-220.

[16] R. HERMANN. Sur les isométries infinitésimales et le groupe d'holonomie d'un espace de Riemann. *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 239, 1954, pp. 1178-1180.

[17] R. HERMANN. Sur les automorphismes infinitésimaux d'une G-structure, *Ibid.*, 239, 1954, pp. 1760-1761.

[18] G. LEGRAND. Étude d'une généralisation..., *Thèse*, Paris, 1958.

[19] P. LIBERMANN. Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales, *Thèse*, *Annali di Matématica*, 36, 1954.

[20] P. Libermann. Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières, *Bull. Soc. Math. France*, 83, 1955, p. 195-224.

[21] P. Libermann. Pseudogroupes infinitésimaux. Application aux G-structures. *C.R. de l'Acad. des Sc. de Paris*, 246, 1958, p. 1365-1368.

[22] A. Lichnerowicz. Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Rome, 1955.

[23] A. Lichnerowicz. Géométrie des Groupes de Transformations, Paris, 1958.

[24] Y. Matsushima. Pseudogroupes de Lie Transitifs, *Séminaire Bourbaki*, 1955, polycopié.

[25] D. C. Spencer. Différentiable Manifolds, (notes Miméographiées, Princeton University).

[26] N. Steenrod. The Topology of Fibre bundles (Princeton Math. Ser. n° 14).

[27] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Lie Group, Osaka *Moth. journal*, 2, 1950, p. 13-14.

[28] W. Klingenberg. Eine Kennzeichnung der Riemannschen sowie der Hermiteschen Mannigfaltigkciten. *Math. Zeitschr*, 70, 1959, p. 300, 309.

(*Thèse*, *Fac. Sciences*, Paris, 1959).

TABLE DES MATIÈRES